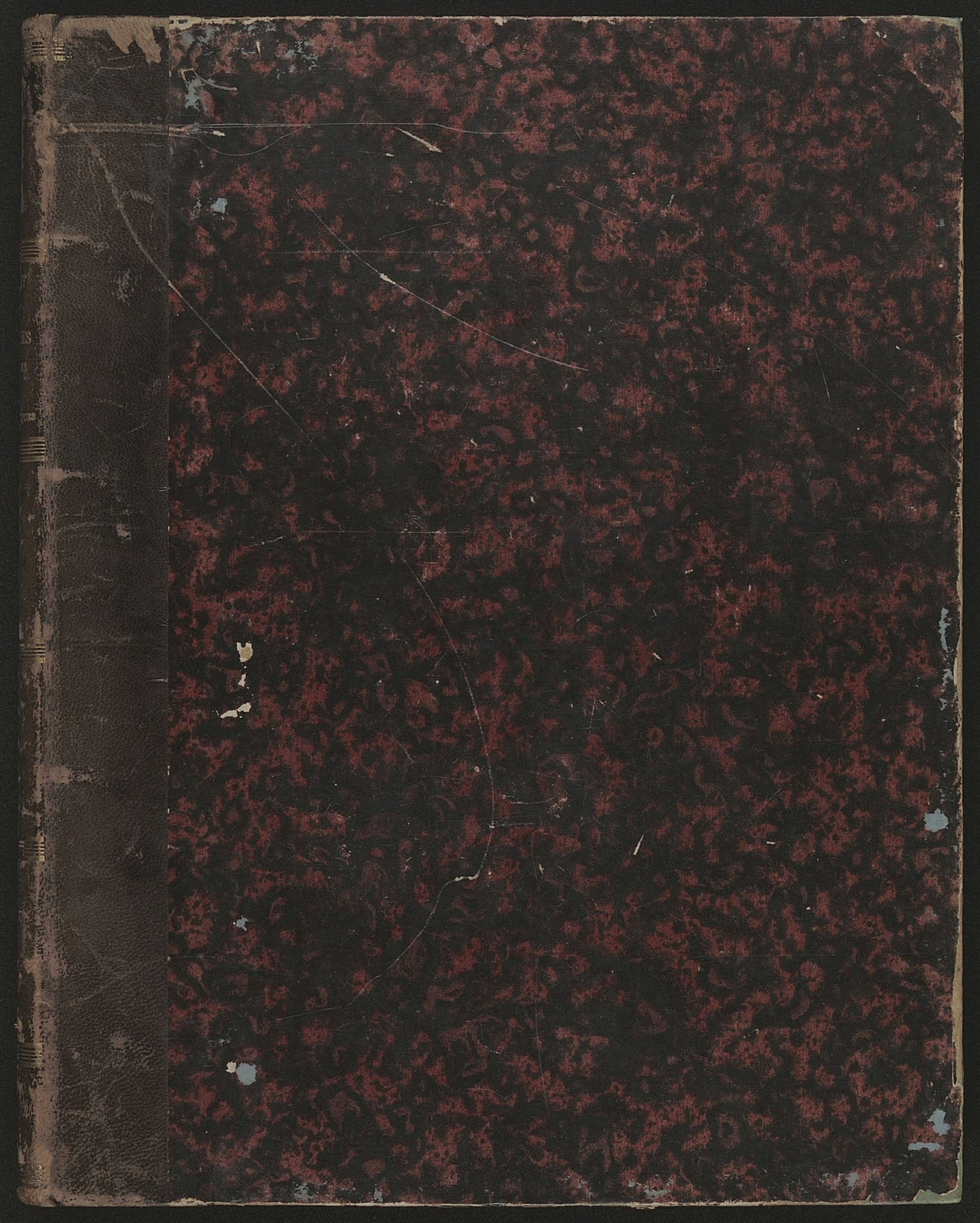
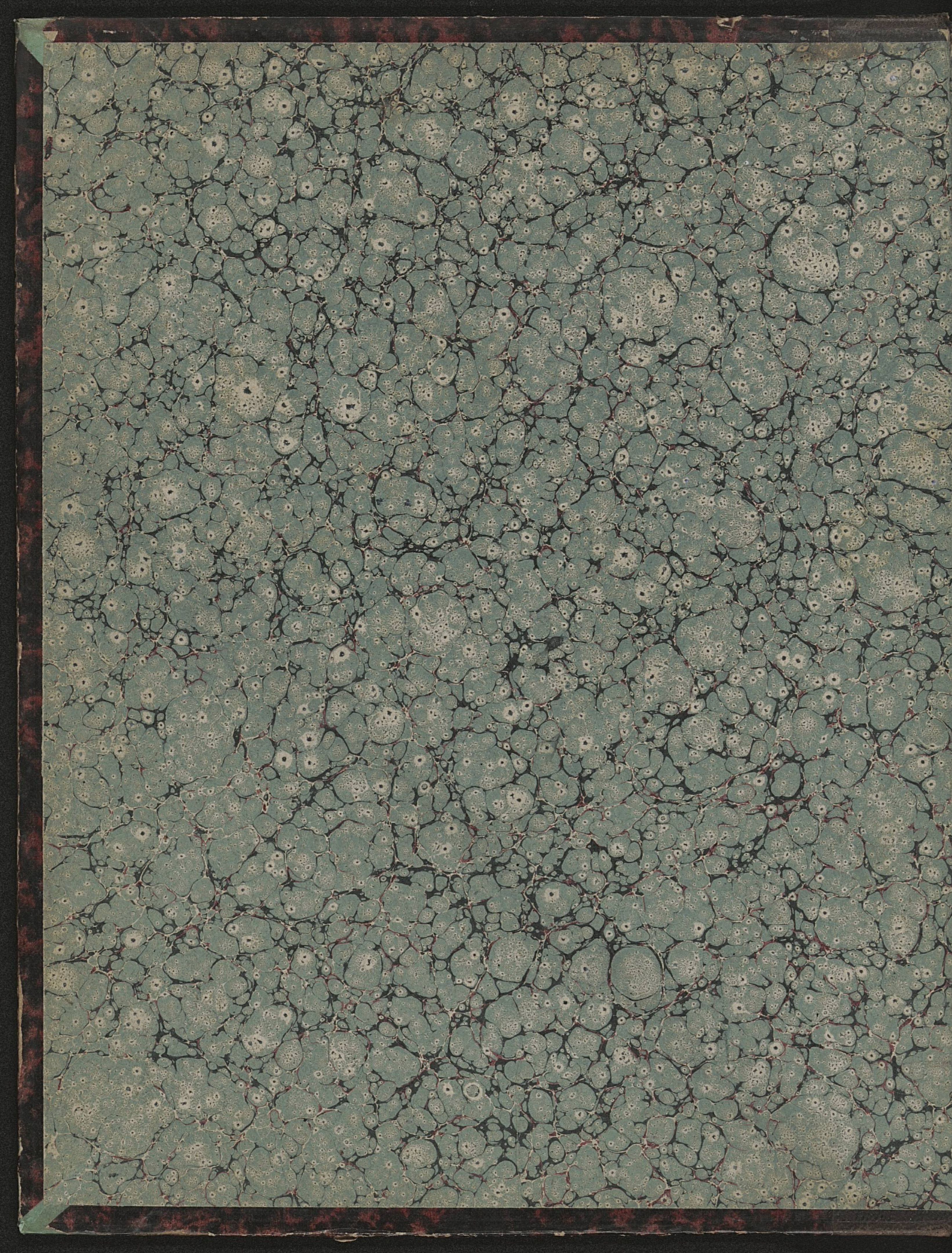
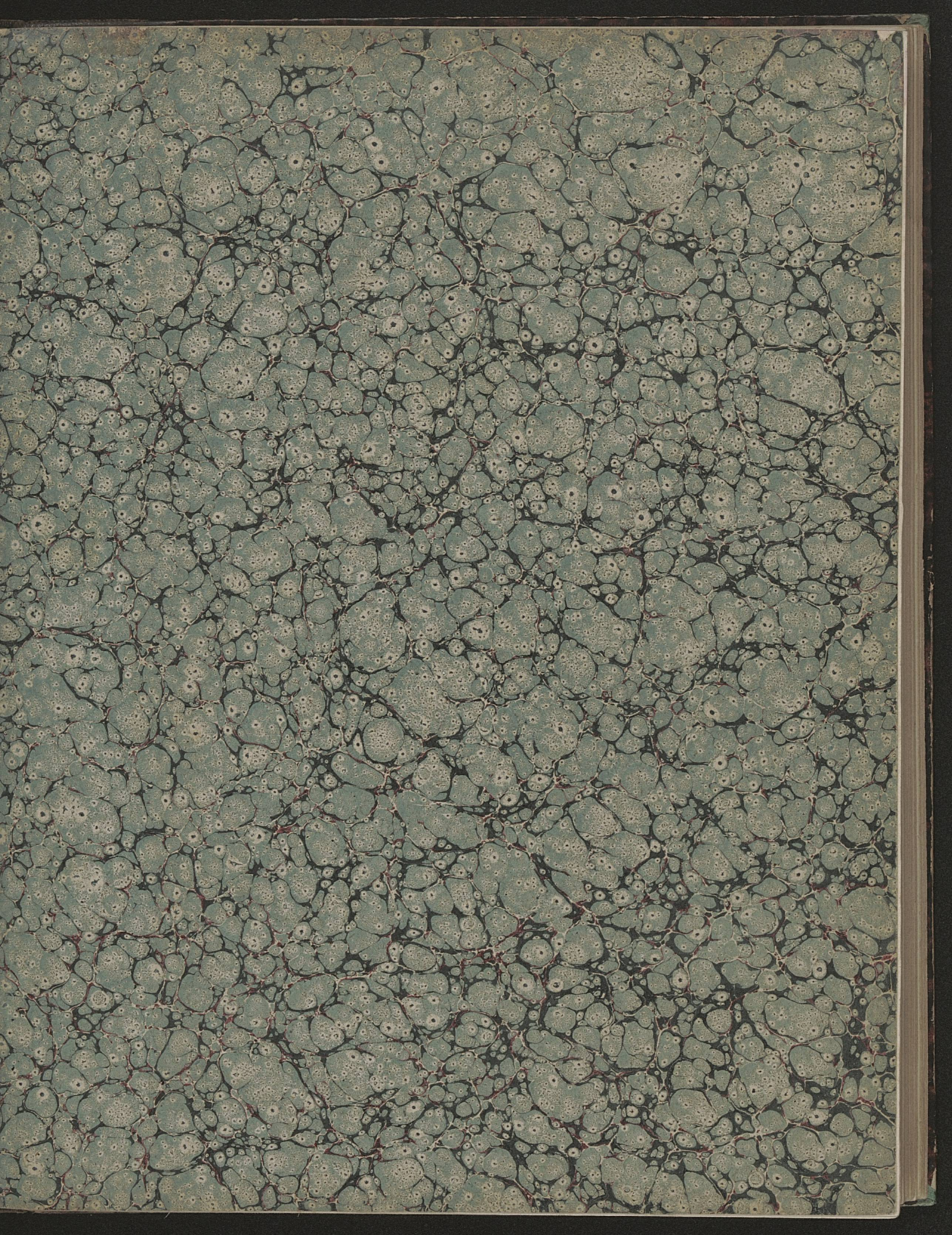
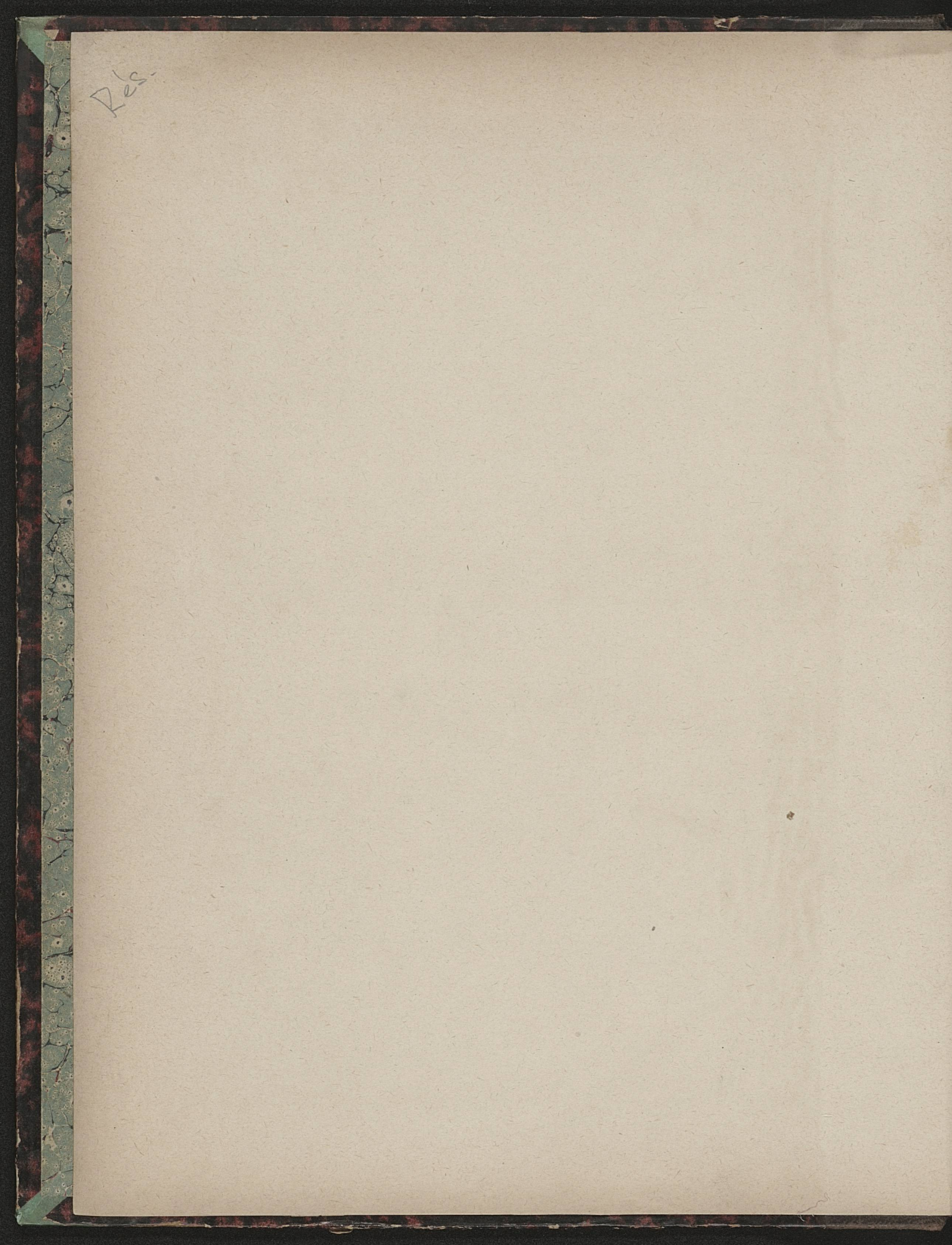







Rés.

EXPOSÉ

DES

MÉTHODES GÉNÉRALES

EN MATHÉMATIQUES

D'APRÈS

HOËNÉ WRONSKI.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Augustins, 55.

EMILE WEST.

EXPOSÉ

DES

MÉTHODES GÉNÉRALES

EN MATHÉMATIQUES,

RÉSOLUTION ET INTÉGRATION DES ÉQUATIONS, APPLICATIONS DIVERSES,

D'APRÈS

HOËNÉ WRONSKI.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1886

PRÉFACE.

Nous réunissons dans ce Volume une suite d'articles qui ont paru, dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, sous le titre de *Méthodes générales en Mathématique d'après Hoëné Wronski;* nous y joignons un *Complément* contenant certaines démonstrations et développements théoriques qui n'avaient pu trouver place lors de la première publication.

Dans ce travail nous nous sommes proposé de faire connaître des procédés de calcul entièrement nouveaux applicables aux questions les plus difficiles des Mathématiques, ainsi que l'on pourra s'en convaincre. Les méthodes dont il s'agit avaient cependant été indiquées dès le commencement du siècle par un géomètre dont le nom, discrédité dans des circonstances inutiles à rappeler, était resté méconnu jusqu'à ces derniers temps. Hoëné Wronski est mort depuis une trentaine d'années et les causes qui ont détourné l'attention de ses travaux n'existent plus; notre génération ne s'intéressant point à des querelles déjà anciennes accueillera les travaux vraiment remarquables d'un savant et profond géomètre.

Les problèmes traités et résolus par Wronski, tous d'un ordre élevé, sont de ceux que nous rencontrons forcément et dont la solution est indispensable aux progrès des sciences.

Les procédés de calcul que l'on possède actuellement sont très insuffisants; on se heurte à chaque pas à des équations que l'on ne sait résoudre, et les travaux considérables que les géomètres ont accumulés depuis près d'un siècle n'ont guère amené de résultats importants. Il importe peu que les intégrations soient sous forme finie ou non, pourvu que les expressions finales se prêtent facilement au calcul, et celui qui est chargé des applications n'a pas lieu de s'inquiéter de

l'origine de ces expressions, si elles sont correctes et avantageuses. Aussi comptons-nous que les méthodes que nous présentons rendront de réels services; elles deviennent aujourd'hui indispensables, aucune autre n'étant susceptible de leur être substituée.

Ces méthodes se rapportent principalement à la résolution et à l'intégration des équations de toute espèce. Parmi celles que Wronski a données et qui remplissent le même but, nous avons dû choisir la plus simple, celle qui pouvait recevoir des applications immédiates; elle est basée sur une formule d'Euler dont on n'avait tiré qu'un parti très restreint.

Dans un premier Chapitre, nous rappelons cette formule, après avoir donné quelques indications préliminaires, nous faisons connaître le principe de la méthode et nous appliquons celle-ci à la résolution d'une équation transcendante déjà résolue différemment par Wronski à l'occasion de son problème de roues à rails mobiles.

Dans le Chapitre suivant nous avons dû faire une digression sur les séries et sur les développements de fonctions pour montrer comment Wronski déduit d'un développement divergent, représentant la valeur réelle d'une fonction, un développement assez convergent pour permettre de calculer cette valeur.

Dans le troisième Chapitre, considérant les équations différentielles, nous montrons comment la méthode de Wronski conduit à leur intégration et nous prenons pour exemple une équation différentielle du premier ordre à une variable indépendante ne pouvant être intégrée que par séries au moyen des procédés ordinaires. Nous donnons, pour ce second exemple, des transformations utiles à connaître; il en est de même pour un troisième où nous intégrons une équation différentielle du troisième ordre proposée autrefois à Wronski.

Dans un quatrième exemple nous effectuons divers calculs numériques sur les intégrales de la première équation différentielle et nous montrons comment on peut atteindre la convergence voulue. Passant ensuite aux équations contenant des différences finies, nous appliquons la méthode à un cinquième exemple.

Les équations aux dérivées et aux différences partielles sont l'objet d'un Chapitre spécial; la méthode, quoique conduisant forcément à des calculs plus compliqués, s'y prête néanmoins facilement, comme nous

le faisons voir à propos de l'intégration des équations complètes donnant les mouvements vibratoires des ondes sonores. Nous effectuons les calculs de manière à faire usage d'une solution approchée donnée par Poisson.

Enfin la dernière question à traiter était celle des équations conjointes; nous montrons dans un dernier Chapitre comment la méthode de Wronski permet de les résoudre ou de les intégrer. Comme application, nous déterminons les fonctions arbitraires provenant de l'intégration des équations des ondes sonores; il s'agit de résoudre ici un système d'équations transcendantes. Nous donnons, comme septième et dernier exemple, le calcul complet d'un profil de mur de barrage de réservoir; dans ce problème les difficultés se trouvent accumulées, il faut faire usage de toutes les ressources de la nouvelle méthode pour résoudre une équation transcendante, intégrer une équation différentielle du second ordre et un système de deux équations différentielles simultanées du même ordre.

Le lecteur qui aura intérêt à approfondir ces procédés nouveaux se convaincra qu'ils n'offrent rien d'illusoire et qu'ils peuvent entrer immédiatement et facilement dans la pratique.

La méthode, fondée sur un principe d'une entière généralité, conduit à l'emploi de certaines quantités arbitraires; elle constitue ainsi une méthode *technique*, suivant l'expression même de l'auteur, et doit être distinguée des méthodes *théoriques* qui ne présentent ordinairement que des moyens particuliers, puisqu'elles excluent toute quantité prise en dehors des éléments mêmes de la question. Cette distinction de la *théorie* et de la *technie* est due entièrement à Wronski; il ne s'agit pas de la distinction ordinaire de la théorie et de la pratique, comme on pourrait le croire. La *théorie* contient l'ensemble des principes nécessaires d'une science et la *technie* l'ensemble des moyens généraux applicables aux cas offerts dans la pratique.

Les géomètres, depuis Newton et Leibnitz, jusqu'au commencement du siècle, ont cultivé la théorie et la technie des Mathématiques; depuis lors ils se sont exclusivement tournés vers la théorie : c'est ce qui explique les résultats infructueux obtenus pour constituer des méthodes générales. Il importait donc d'insister sur la division qui s'établit nécessairement dans chaque science et qui constitue deux parties essen-

tiellement distinctes : c'est ce que nous avons fait dans le *Complément* en traitant de la Loi suprême de Wronski, dans le premier Chapitre, et des applications de cette loi à divers développements de fonctions, dans le second. La Loi suprême étant, d'après Wronski, le principe fondamental des Mathématiques, nous aurions dû régulièrement la faire connaître en premier lieu; il eût même été préférable de faire précéder l'exposition de la méthode par ce *Complément*, partie entièrement théorique; mais, comme nous l'avons dit, nous avons voulu aborder de suite les calculs qui pouvaient conduire à des applications immédiates et présenter par là une réelle utilité. Le lecteur, s'il le préfère, pourra donc commencer par ce *Complément*.

Le premier Chapitre commence par un résumé très succinct des principes philosophiques qui ont guidé Wronski dans toutes ses recherches. Par philosophie il faut ici entendre l'étude de l'ensemble des procédés suivis par la raison dans ses diverses opérations. La philosophie ainsi comprise doit précéder naturellement l'étude de toute Science, de plus il faut savoir que l'immense Œuvre scientifique de Wronski n'a été qu'une application constante du système philosophique dont il est l'auteur.

Dans le second Chapitre, nous reproduisons la démonstration que Wronski a donnée de la formule d'Euler et nous donnons sur la méthode suprême, ou méthode théorique proprement dite, des indications suffisantes pour que dès à présent il puisse en être fait des applications.

Nous avons fait un fréquent usage de sommes, ou fonctions, ayant une grande analogie avec les déterminants : ce sont les Agrégats de Wronski. Dans le troisième Chapitre nous en donnons la théorie et nous en faisons l'application à la résolution des équations linéaires.

Enfin, dans le quatrième Chapitre, nous appliquons ce système de résolution à l'intégration des équations linéaires à coefficients constants, au calcul des fonctions symétriques et particulièrement à celui des fonctions aleph dont nous faisons connaître les propriétés principales. Nous terminons par la théorie générale des sinus des ordres supérieurs et par l'application de ces fonctions à l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants. La marche que nous avons suivie dans l'intégration de ce genre d'équations nous a conduit à l'intégration des équations linéaires à coefficients variables; nous en dirons un mot à cette occasion.

Malgré les soins que nous avons apportés à la rédaction de cet Ouvrage, il présente encore quelques imperfections que nous devons signaler et qui tiennent surtout à ce que les articles dont se compose la première Partie ont paru successivement et n'ont pu être revus dans leur ensemble; du reste, ces inexactitudes légères, que nous avons reconnues dans les premiers Chapitres, ont été rectifiées dans les derniers; enfin, les erreurs que la correction des épreuves la plus minutieuse laisse toujours échapper ont fait l'objet d'*errata* placés à la fin de ce Volume. Le Chapitre relatif à l'intégration des équations aux dérivées partielles et à celle des équations simultanées est correct; ce dernier article résume ce qui précède.

Le *Complément* a été revu avec soin; et le premier Chapitre, rédigé depuis plusieurs années déjà, est conforme en tous points aux idées de Wronski.

Ce *Complément* ayant dépassé les limites que nous nous étions fixées, nous avons dû omettre les calculs qui se rapportent aux dérivées des fonctions de plusieurs variables et aux développements de ces fonctions; ces calculs ont d'ailleurs été traités d'une manière très complète dans la deuxième Section de la *Philosophie de la technie*. Nous n'avons pas donné non plus les calculs relatifs à la formation des équations différentielles, ce que nous avons dit à l'occasion des équations simultanées suffira dans la plupart des cas. L'importance de cette question exige que nous en fassions l'objet d'un Mémoire spécial. Les calculs se déduiraient d'ailleurs sans difficulté du principe que nous avons établi.

La méthode que nous présentons n'est pas la seule que nous ayons rétablie : nous avons examiné les différents moyens proposés par Wronski pour la résolution et l'intégration des équations; dans certaines applications à des questions concernant les sciences physiques nous avons été forcé de faire usage de toutes les ressources offertes par différentes méthodes. Nous pourrons faire connaître plus tard ces autres procédés de calcul; parmi ceux-ci nous devons signaler la méthode d'intégration par interpolation comme devant offrir de grandes ressources aux sciences d'observation.

Nous avons aussi complété l'ensemble de ces méthodes par la préparation des Tables qui deviendront nécessaires pour l'exécution des calculs : celles des sinus du premier, du second et du troisième ordre,

auxquelles nous pourrons joindre une Table complète des logarithmes à neuf figures des nombres de 1 à 1 442 695 040, ne contenant pas plus de trois feuillets in-quarto.

Néanmoins, nous offrons dès à présent un ensemble de procédés de calcul très complet, qui, nous l'espérons, sera utile aux progrès de la Science.

EXPOSÉ

DES

MÉTHODES GÉNÉRALES

EN MATHÉMATIQUES

D'APRÈS

HOËNÉ WRONSKI[1].

RÉSOLUTION ET INTÉGRATION DES ÉQUATIONS.

INTRODUCTION.

Énumération des diverses méthodes. — Dans ces dernières années, les travaux mathématiques de Hoené Wronski ont été cités plusieurs fois sans que personne se soit arrêté aux méthodes générales proposées par ce géomètre. Elles nous ont paru éminemment pratiques et très simples dans leurs principes chaque fois que nous avons eu occasion de les examiner ou d'en faire des applications.

Les Ouvrages de Wronski sont très rares et la lecture en est difficile au premier abord; aussi nous espérons que l'on nous saura gré de

---

(1) Wronski (Hoëné), né à Posen en 1778, est mort à Neuilly le 9 août 1853. A l'âge de seize ans, il était officier d'artillerie sous les ordres de Kosciusko. Fait prisonnier par les Russes à la bataille de Maciéiowicz, le 10 octobre 1794, il accepta dans leur armée le grade de lieutenant-colonel, dont il se démit en 1797, pour s'adonner exclusivement à l'étude de la Philosophie et des Sciences mathématiques, d'abord pendant deux années en Allemagne, puis en France jusqu'à la fin de ses jours. (*Note de la Rédaction.*)

présenter les méthodes dont nous parlons avec les notations ordinairement usitées et accompagnées d'exemples suffisants pour les rendre facilement intelligibles. Nous nous adressons surtout aux personnes qui font un fréquent usage des Mathématiques et qui sont conduites par leurs travaux à des calculs élevés.

Il nous semble utile de signaler d'abord les différentes méthodes de Wronski ([1]).

Nous désignons par le mot *méthode* l'application systématique d'une loi fondamentale déterminée.

En premier lieu, nous citerons pour mémoire une méthode générale concernant la théorie des nombres. Le principe fondamental a été démontré par M. Hanegraef, *Note sur l'équation de congruence*

$$x^m \equiv r \pmod{p} \ ([2]),$$

et par A. Bukaty, *Déduction et démonstration des trois lois primordiales de la congruence des nombres* ([3]).

Cette méthode a été développée au commencement du Tome I de la *Réforme du savoir humain* (1847).

Les autres méthodes ont exclusivement rapport à l'expression des fonctions proprement dites. Ce sont : la *méthode secondaire*, méthode pratique et universelle (c'est-à-dire *technique*, pour employer le langage de Wronski); elle permet de résoudre toute espèce d'équations et d'intégrer les équations aux différences ou aux différentielles totales ou partielles. Le nom de *méthode secondaire* indique que cette méthode doit prêter son concours à une autre méthode, dite *méthode suprême*. Celle-ci est fondamentale; elle est à la fois théorique et technique. D'après Wronski, on peut en déduire toutes les lois des Mathématiques.

Ces deux méthodes se subdivisent en *méthodes élémentaires* et *méthodes systématiques*, suivant que l'on ne distingue spécialement aucune

---

([1]) Aucune de ces méthodes n'a rapport à la Géométrie.

([2]) Gauthier-Villars, 1860.

([3]) Amiot, 1873.

des diverses parties qui composent les équations ou que l'on distingue systématiquement ces parties.

Il existe encore deux méthodes générales : l'une est basée sur l'*interpolation;* elle a pour but de résoudre ou d'intégrer une équation d'un genre quelconque quand les dérivées ou les différences successives des fonctions proposées sont trop pénibles à calculer. On remplace ces éléments des fonctions par un nombre suffisant de valeurs des fonctions proposées correspondant à des valeurs déterminées des variables indépendantes.

L'autre, la *méthode d'exhaustion,* est, comme son nom l'indique, une méthode générale d'approximation. Son caractère consiste en ce que les accroissements successifs des différents termes qui déterminent la fonction problématique ne sont liés par aucune loi, et qu'ils doivent être calculés directement et non par des tâtonnements. Cette méthode peut s'appliquer encore à tous les problèmes, et l'on n'a besoin que de connaître les différentielles de la fonction proposée; c'est surtout dans l'évaluation des intégrales qu'elle peut être employée avec succès.

Avant d'entreprendre l'examen des différentes méthodes, ou tout au moins des premières, nous devrions commencer par démontrer les deux lois fondamentales d'où dérivent la méthode suprême et la méthode secondaire; mais, pour ne pas entrer dans des considérations préliminaires qui nous entraîneraient trop loin, nous commencerons par la méthode secondaire élémentaire. Nous aurons ainsi l'avantage de donner une première idée de la méthode secondaire et de faciliter ensuite l'exposition de la méthode systématique.

Nous devons prévenir que cette méthode élémentaire, quoique permettant de résoudre ou d'intégrer tout genre d'équations, entraîne généralement à des complications que ne donne pas la méthode systématique; parfois même elle peut devenir insuffisante, comme nous aurons occasion de le voir. Cependant la méthode élémentaire doit être préférée dans certains cas, ce qui arrive particulièrement quand il faut déterminer principalement les valeurs numériques de certaines quantités.

Fonctions employées et notations. — Wronski a fait, dès le commen-

cement du siècle, un usage très étendu des déterminants, qu'il désignait sous le nom de *sommes combinatoires* ou de *fonctions schin* (voir la *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, 1812; *Philosophie de la Technie*, 1815, etc.).

Nous emploierons indifféremment les notations usitées

$$(\alpha) \qquad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

ou

$$\text{D}(a_1^1 \,.\, a_2^2 \,.\, a_3^3 \ldots . \, a_n^n).$$

La seconde notation est celle dont Wronski faisait usage, avec cette différence que la caractéristique D du déterminant était remplacée par la lettre hébraïque schin, caractéristique de la somme combinatoire. Ces fonctions ne sont d'ailleurs que des expressions tabulaires de termes distincts et achevés, car elles n'indiquent pas certaines opérations particulières et elles ne sont pas l'expression de quelques fonctions indépendantes, telles que les logarithmes ou les sinus.

Indépendamment de ces sommes combinatoires, Wronski considérait d'autres sommes de même espèce, qu'il désignait sous le nom d'*agrégats;* nous en ferons également usage. On trouvera dans la *Philosophie de la Technie*, vers la formule (451), la relation qui existe entre les agrégats et les fonctions schin.

Les agrégats sont formés de termes de même signe qui dérivent les uns des autres d'après une loi déterminée, et cette loi porte ordinairement sur certains indices des éléments de ces sommes. On dénote ces fonctions par le terme général placé entre accolades et précédé de la caractéristique Agr, et par la loi des indices. Ainsi la fonction symétrique

$$(\beta) \quad a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_1 a_2^2 + a_2 a_3^2 + a_3 a_1^2 + a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + a_3^2 a_1 + a_1 a_2 a_3$$

peut être représentée par l'agrégat suivant

$$(\gamma) \qquad \text{Agr}\,\{\, a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \cdot a_3^{p_3} \,\}.$$

Les indices p_1, p_2, p_3 doivent être donnés par la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation indéterminée

$$(\gamma)' \qquad p_1 + p_2 + p_3 = 3.$$

Wronski faisait encore un fréquent usage de certaines fonctions symétriques qu'il nommait *fonctions aleph*. Bien que ces fonctions puissent être exprimées par des fonctions symétriques plus simples, il convient de leur donner une notation spéciale, car elles entrent directement dans beaucoup d'expressions. On peut définir les fonctions aleph en disant qu'elles proviennent du développement de la puissance μ d'un polynôme de m termes ou éléments, dans lequel on remplacerait par l'unité les divers coefficients. Wronski les désigne par la lettre hébraïque aleph $\aleph$; il met entre crochets les éléments qui composent cette fonction et en exposant, avec parenthèses, le degré qui lui correspond.

Ainsi l'expression précédente (β) est une fonction aleph que l'on notera ainsi :

$$(\delta) \qquad \aleph\,[a_1 \cdot a_2 \cdot a_3]^{(3)}.$$

Quand on considère plusieurs fonctions aleph formées des mêmes éléments, on peut ne pas écrire ces éléments et n'indiquer que l'exposant ; de cette façon, la fonction précédente s'écrira

$$(\delta)' \qquad \aleph(3).$$

Ces fonctions se présentent souvent ; on les a autrefois rencontrées dans les séries récurrentes.

Les fonctions aleph jouissent de propriétés que nous ferons connaître dans la suite ; nous indiquerons seulement ici leur propriété fondamentale, qui est la suivante :

$$(\varepsilon) \qquad \aleph[\mathrm{N}_\omega - n_p]^{(m)} - \aleph[\mathrm{N}_\omega - n_q]^{(m)} = (n_q - n_p)\,\aleph\,[\mathrm{N}_\omega]^{(m-1)}.$$

N_ω représente un nombre quelconque ω d'éléments dont n_p et n_q font partie, et $[N_\omega - n_p]$ représente tous ces éléments, sauf n_p ; de même $[N_\omega - n_q]$ les représente tous, sauf n_q (voir *Introduction à la Philosophie des Mathématiques*, 1811).

De l'expression précédente on déduit celle-ci :

$$(\zeta) \quad \begin{cases} \aleph(m) = \Sigma_1(\mu)\aleph(m-1) - \Sigma_2(\mu)\aleph(m-2) + \ldots \\ \qquad + (-1)^{\mu-1}\Sigma_\mu(\mu)\aleph(m-\mu). \end{cases}$$

m est le degré de la fonction considérée, et μ le nombre des éléments qui entrent dans toutes ces fonctions aleph ; $\Sigma_p(\mu)$ représente de plus la somme de tous les produits différents des μ éléments p à p. Le nombre m doit être ici plus grand que μ, ou tout au moins égal ; autrement la fonction aleph qui aurait un exposant négatif devrait être considérée comme nulle, ainsi que nous allons le voir.

Si les éléments sont les racines de l'équation

$$(\eta) \quad A_\mu x^\mu + A_{\mu-1}x^{\mu-1} + A_{\mu-2}x^{\mu-2} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0,$$

l'expression précédente s'écrit

$$(\theta) \, A_\mu \aleph(m) + A_{\mu-1}\aleph(m-1) + A_{\mu-2}\aleph(m-2) + \ldots + A_0\aleph(m-\mu) = 0.$$

Supposons $A_\mu = 0$, nous aurons pour les premières valeurs des fonctions aleph

$$(\theta)' \quad \begin{cases} \aleph(0) = 1, \\ -\aleph(1) = A_{\mu-1}, \\ -\aleph(2) = A_{\mu-1}\aleph(1) + A_{\mu-2}, \\ -\aleph(3) = A_{\mu-1}\aleph(2) + A_{\mu-2}\aleph(1) + A_{\mu-3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Nous démontrerons le théorème suivant :

$$(\iota) \quad \aleph(m) = \frac{\mathfrak{D}(n_1^0 n_2^1 n_3^2 \ldots n_{\mu-1}^{\mu-2} n_\mu^{m+\mu-1})}{\mathfrak{D}(n_1^0 n_2^1 n_3^2 \ldots n_{\mu-1}^{\mu-2} n_\mu^{\mu-1})}$$

On voit immédiatement que, pour $m = 0$, la fonction se réduit à

l'unité; si m a une valeur négative comprise entre -1 et $-(\mu-1)$, la fonction est nulle; au delà les valeurs négatives de m n'annulent généralement pas la fonction. Ainsi nous dirons que les fonctions aleph *négatives* sont nulles pour un exposant pris entre -1 et $-(\mu-1)$, en y comprenant ces limites.

M. Hanegraeff (*Méthode pour la résolution générale des équations par leur décomposition en facteurs,* Bruxelles, 1854) a indiqué la propriété suivante.

Soit l'équation

$$(\varkappa) \qquad F(x) = x^{\mu} - A_1 x^{\mu-1} + A_2 x^{\mu-2} - \ldots \mp A_{\mu-1} x \pm 1 = 0.$$

L'équation dont les racines ont des valeurs inverses de celles de la précédente est

$$(\varkappa)' \qquad f(x) = x^{\mu} - A_{\mu-1} x^{\mu-1} + A_{\mu-2} x^{\mu-2} - \ldots \mp A_1 x \pm 1 = 0.$$

Si l'on développe par la formule de Maclaurin l'inverse des premiers membres de ces équations, on aura

$$(\lambda) \qquad \frac{1}{f(x)} = \aleph(0) + x\aleph(1) + x^2\aleph(2) + x^3\aleph(3) + \ldots$$

et

$$(\lambda)' \qquad \frac{1}{F(x)} = \aleph'(0) + x\aleph'(1) + x^2\aleph'(2) + x^3\aleph'(3) + \ldots;$$

l'accent placé sur les fonctions aleph de la seconde égalité indique que les éléments qui les composent sont différents de ceux qui composent les fonctions aleph de la première égalité.

Le théorème en question revient aux expressions des coefficients généraux :

$$(\mu) \qquad \aleph(m) = \frac{1}{1.2.3\ldots m}\left[\frac{d^m \frac{1}{f(x)}}{dx^m}\right]_{(x=0)},$$

$$(\mu)' \qquad \aleph'(m) = \frac{1}{1.2.3\ldots m}\left[\frac{d^m \frac{1}{F(x)}}{dx^m}\right]_{(x=0)}.$$

Or $\aleph'(m)$ est une fonction aleph négative de $\aleph(m)$, ce qui donne la relation

$$(\nu) \qquad \aleph'(\mu) = \aleph[-(m+\mu)];$$

pour la première valeur, on a

$$(\nu)' \qquad \aleph'(0) = \aleph(-\mu) = (-1)^{\mu-1}.$$

Il est encore une autre espèce de fonctions dont nous devons parler; elles sont connues sous le nom de *facultés*. Ces fonctions s'introduisent nécessairement dans les calculs, car elles interviennent quand on considère les différences des quantités variables, de la même manière que les puissances ou les exponentielles quand on considère les différentielles.

Soit $\varphi(x)$ une fonction de la variable x; la faculté $\varphi(x)^{m|\xi}$ n'est autre que le produit

$$(\xi) \qquad \varphi(x)\varphi(x+\xi)\varphi(x+2\xi)\varphi(x+3\xi)\ldots\varphi[x+(m-1)\xi].$$

m est l'exposant de la faculté et ξ l'accroissement de la variable ; ces quantités m et ξ peuvent être constantes ou variables.

Les produits d'un nombre infini de facteurs ne doivent pas être confondus avec les facultés; ces dernières fonctions sont plus générales.

Vandermonde a le premier reconnu ces fonctions dans son *Mémoire sur les irrationnelles de différents ordres* (*Histoire de l'Académie royale des Sciences*, 1772, Ire Partie, p. 489). Plus tard, Kramp, dans son *Analyse des réfractions astronomiques*, a fait une étude complète des facultés particulières nommées *factorielles*. Enfin Wronski a complété l'étude des facultés et a montré qu'elles pouvaient servir à représenter toute espèce de fonctions.

Les facultés, malgré leur importance, paraissent tombées dans l'oubli, quoique plusieurs géomètres aient reconnu leur utilité. Nous citerons à ce sujet un passage d'une Lettre d'Abel à Holmboe, qui fait connaître l'opinion de ces mathématiciens :

« .... *Theorie der analytischen Facultäten* (cet Ouvrage se trouve à la bibliothèque de Christiania; si tu ne l'as pas lu, il faut absolument que tu le

fasses; c'est un Ouvrage supérieur à différents égards et surtout par rapport à la méthode....) ». (Lettre du 24 octobre 1826; *Œuvres complètes de N.-H. Abel*, t. II, p. 270.)

Il conviendra, pour les factorielles que l'on rencontre constamment, d'adopter la notation des facultés; la notation usitée aujourd'hui est d'ailleurs insuffisante. Le produit des m premiers nombres pourra donc s'écrire de la manière suivante :

$$(\xi)' \qquad 1.2.3\ldots m = 1^{m|1}.$$

L'avantage de cette notation s'appréciera facilement. Par exemple, si l'on avait à exprimer la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un polynôme de n termes, $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, on aurait, en faisant usage des agrégats,

$$(o)' \quad (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) = 1^{m|1}.\text{Agr}\left\{\frac{a_1^{p_1}\, a_2^{p_2}\, a_3^{p_3} \ldots a_n^{p_n}}{1^{p_1|1}\, 1^{p_2|1}\, 1^{p_3|1} \ldots 1^{p_n|1}}\right\},$$

avec la condition

$$(o)' \qquad m = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n,$$

équation indéterminée qui doit être résolue en nombres entiers et positifs par rapport aux quantités $p_1, p_2, p_3, \ldots$, m étant supposé un nombre entier.

En prenant encore un exemple, on aurait, pour le développement de la fonction $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$(\varpi) \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots,$$

le terme général étant

$$(\varpi)' \qquad (-1)^{n-1}\frac{1^{n|2}}{2^{n|2}}x^{2n}.$$

Nous reviendrons plus loin sur l'usage que l'on peut faire des facultés et sur leurs propriétés.

Nous ne faisons également que mentionner les sinus d'ordres supé-

rieurs, dont nous verrons l'utilité dans la méthode secondaire. Pour les principales propriétés des sinus et leur introduction dans les calculs, nous renvoyons aux deux Mémoires de M. Yvon Villarceau insérés dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. LXXXVI, séances des 13, 20 et 27 mai 1878, et t. XC, séances des 29 mars et 5 avril 1880).

Nous devons dire encore que nous noterons les dérivées partielles, comme on le fait souvent, en mettant entre parenthèses la dérivée que l'on considère. Par exemple, si $\varphi(y)$ représente une fonction de y et d'autres quantités, toutes fonctions de x ainsi que de y, nous écrirons la dérivée de la fonction proposée par rapport à y

$$(\rho) \qquad \frac{d\varphi(y)}{dy}.$$

Mais, si l'on prenait la dérivée de $\varphi(y)$ par rapport à x, sur la variable y seulement, nous écririons

$$(\rho)' \qquad \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)\frac{dx}{dy}.$$

Autant que possible, nous citerons les passages des Ouvrages de Wronski se rapportant aux sujets que nous traiterons ; autrement, nous donnerons les indications nécessaires pour que l'on puisse recourir à ces Ouvrages.

PREMIÈRE MÉTHODE.

MÉTHODE SECONDAIRE ÉLÉMENTAIRE.

Conditions générales de la méthode.

Expression fondamentale. — En nous plaçant à un point de vue particulier, nous dirons que le principe de cette méthode consiste dans l'usage général d'une formule dont celle de Taylor n'est qu'un cas particulier.

Euler en a donné une qui remplit cette condition pour la méthode élémentaire.

Soit

$$(1) \qquad \varphi(y) = 0$$

l'équation proposée qu'il s'agit de résoudre ; y est l'inconnue, celle-ci pouvant être fonction d'une variable indépendante x (nous ne considérerons d'abord que les fonctions d'une seule variable indépendante). Soit de plus une quantité *quelconque* w ; l'équation proposée est toujours satisfaite par une valeur de y donnée par l'expression

$$(2) \qquad y = w - \varphi(w)\frac{dw}{d\varphi(w)} + [\varphi(w)]^2 \frac{1}{2}\,\frac{d^2\varphi(w)\,dw}{[d\varphi(w)]^3} - \ldots,$$

le terme général étant

$$(2)' \qquad -[\varphi(w)]^\mu \frac{\textcircled{D}\{d^2\varphi(w)\,d^3[\varphi(w)]\,d^4[\varphi(w)]^3 \ldots d^\mu[\varphi(w)]^{\mu-1}\}\,d\varphi(w)}{1^{1|1}\,1^{2|1}\,1^{3|1}\ldots 1^{\mu|1}\,[d\varphi(w)]^{1+2+3+\ldots+\mu}}.$$

Or, comme nous l'avons dit, puisque nous ne distinguons pas dans cette méthode élémentaire les diverses parties qui composent l'équation proposée, la forme de la fonction $\varphi(y)$ suffira pour désigner généralement le premier membre d'une équation d'un genre quelconque, algébrique ou transcendante, primitive ou différentielle.

Si, au lieu de l'inconnue y, nous voulons obtenir une fonction déterminée $F(y)$ de cette inconnue, nous substituerons à la formule d'Euler la formule suivante :

$$(3) \qquad F(x) = F(w) - \varphi(w)\frac{dF(w)}{d\varphi(w)} + [\varphi(w)]^2 \frac{\textcircled{D}[d\varphi(w)\,d^2F(w)]}{1^{1|1}\,1^{2|1}[d\varphi(w)]^3} - \ldots,$$

le terme général étant

$$(3)' \qquad (-1)^\mu \frac{\textcircled{D}\{d\varphi(w)\,d^2[\varphi(w)]^2\,d^3[\varphi(w)]^3 \ldots d^{\mu-1}[\varphi(w)]^{\mu-1}\,d^\mu F(w)\}}{1^{1|1}\,1^{2|1}\,1^{3|1}\ldots 1^{\mu|1}[d\varphi(w)]^{1+2+\ldots+\mu}}.$$

Démonstration. — Il existe plusieurs démonstrations des expressions (2) et (3) ; nous n'avons pas à les exposer ; nous indiquerons seulement ici, afin de ne pas nous répéter, la démonstration de Wronski (*Philosophie de la Technie,* Ire Section), parce qu'elle contient le prin-

cipe de toutes les autres et qu'elle fait connaître en même temps la signification de la quantité ϖ.

Soit $F(y)$ une fonction donnée de la quantité y; considérons son développement par rapport aux puissances d'une autre fonction $\varphi(y)$ également donnée; nous aurons la série

$$(4)\qquad F(y) = A_0 + A_1[\varphi(y)] + A_2[\varphi(y)]^2 + A_3[\varphi(y)]^3 + \dots$$

Les coefficients $A_0, A_1, A_2, \dots$ sont supposés indépendants de y et sont donnés par l'expression suivante, déterminée par une valeur particulière ϖ, mais quelconque, de y :

$$(4)'\qquad A_\mu = \Xi_\mu - \frac{\mu+1}{1}\Xi_{\mu+1}\,\varphi(\varpi) + \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{1.2}\Xi_{\mu+2}[\varphi(\varpi)]^2 - \dots,$$

en faisant, pour un indice quelconque ν,

$$(4)''\qquad \Xi_\nu = \frac{\textcircled{D}\{d^1\varphi(\varpi)\,d^2[\varphi(\varpi)]^2\dots d^{\nu-1}[\varphi(\varpi)]^{\nu-1}d^\nu F(\varpi)\}}{1^{1|1}\,1^{2|1}\dots 1^{\nu|1}[d\varphi(\varpi)]^{1+2+\dots+\nu}}.$$

Nous aurons occasion de démontrer ces formules plus loin; c'est pourquoi nous ne nous y arrêtons pas.

Ainsi, quelle que soit la valeur de ϖ, le développement (4) subsiste toujours; par suite, les coefficients $A_0, A_1, A_2, \dots$ doivent rester les mêmes. Si donc ϖ prend une valeur particulière u telle que l'on ait

$$(5)\qquad \varphi(u) = 0,$$

on aura aussi

$$A_\mu = \Xi'_\mu,$$

en désignant par un accent la valeur particulière que prend Ξ_μ pour $\varpi = u$.

Faisons $\mu = 0$,

$$(5)'\qquad A_0 = \Xi'_0 = F(u);$$

d'après (5) et d'après (4′) on aura également

$$(6)\qquad A_0 = \Xi_0 - \Xi_1\varphi(\varpi) + \Xi_2[\varphi(\varpi)]^2 - \Xi_3[\varphi(\varpi)]^3 + \dots$$

Or, si φ est la fonction qui forme le premier membre de l'équation (1), u sera précisément l'inconnue y, et nous aurons

$$(6)' \quad F(y) = \Xi_0 - \Xi_1 \varphi(\varpi) + \Xi_2 [\varphi(\varpi)]^2 - \Xi_3 [\varphi(\varpi)]^3 + \ldots;$$

les coefficients Ξ_0, Ξ_1, Ξ_2, ... sont identiques aux coefficients de l'expression (3).

On conçoit maintenant comment, en principe, l'expression (3), pour toute valeur de ϖ, donne une solution de l'équation (1) d'un genre quelconque. Cependant cette expression (3) peut être convergente ou divergente, ce qui fait que l'on ne doit pas prendre ϖ d'une manière tout à fait arbitraire ; cette quantité doit, au contraire, être choisie la plus rapprochée possible de la quantité cherchée y, puisqu'il semble évident que l'expression (3) doit être d'autant plus convergente que la quantité ϖ est plus près de zéro.

Remarque sur les quantités idéales et absurdes. — Avant d'étudier les conditions de convergence de l'expression (3), nous ferons une observation relative aux quantités qui indiquent des cas d'impossibilité.

Wronski distingue deux espèces de quantités *idéales*, les quantités infinies et les quantités imaginaires ([1]). Les premières impliquent expressément l'idée de l'infini dans la considération de la *quantité* même; les quantités imaginaires de la forme $a + b\sqrt{-1}$ impliquent l'idée de l'infini dans la considération de la *qualité* même de la quantité, qualité qui constitue l'état positif ou négatif. Ces quantités sont possibles idéalement et non réellement.

De plus, il existe des quantités *absurdes* qui ne sont possibles ni réellement ni idéalement. Ainsi l'expression (4) sera impossible dans deux cas : 1° lorsque les coefficients donnés par (4)' seront des quantités idéales, c'est-à-dire imaginaires ou infinies; 2° lorsque les expressions (4)', (4)'' conduiront à de véritables absurdités.

([1]) Pour plus de détails sur ce sujet, nous sommes obligé de renvoyer à l'*Introduction à la Philosophie des Mathématiques et à la Philosophie de la Technie*.

Dans le premier cas, le développement ne peut être exprimé que par des quantités infinies, et l'impossibilité n'existe que par rapport à des quantités réelles; ce développement n'est en défaut que si l'on envisage spécialement les quantités réelles.

Dans le deuxième cas, l'impossibilité est absolue. Si l'on trouve, par exemple, pour les coefficients A_0, A_1, A_2, ..., des quantités différentes à mesure que l'on change la valeur arbitraire ϖ attribuée à y, le développement est *absurde*. Pour fixer les idées, si l'on avait pour la fonction $\varphi(y)$ la valeur

$$(7) \qquad \varphi(y) = M_0 + M_1 y + M_2 y^2 + \ldots + M_n y^n,$$

$M_0, M_1, M_2, \ldots$ étant des constantes, on obtiendrait n valeurs différentes pour chaque coefficient A de (4). Si l'on prend pour ϖ une valeur qui annule le polynôme (7), on a

$$(7)' \qquad A_\mu = \frac{\mathfrak{D}\{d\varphi(\varpi)\, d^2[\varphi(\varpi)]^2 \ldots d^\mu F(\varpi)\}}{1^{1|1}\, 2^{1|1} \ldots \mu^{1|1}\, [d\varphi(\varpi)]^{1+2+\ldots+\mu}},$$

et, comme il y a n valeurs de ϖ qui annulent le polynôme, on aurait n valeurs analogues A_μ, A'_μ, A''_μ, ..., lesquelles, en vertu de l'identité nécessaire de chacun de ces coefficients avec le premier, donneraient

$$(7'') \qquad A_\mu = A'_\mu = A''_\mu = \ldots,$$

ce qui est absurde.

Nous ne parlons pas de la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, parce qu'elle est seulement indéterminée et non impossible.

De ce qui précède il résulte que dans tous les cas il suffit de s'en tenir aux expressions (4)', (4)'' des coefficients, sans faire attention aux conditions fondamentales du développement (4), car, lorsqu'un tel développement sera impossible d'une façon relative ou absolue, l'expression en question le fera toujours connaître en donnant pour les coefficients A_0, A_1, A_2, ... des quantités idéales ou absurdes.

Fonctions arbitraires. — C'est dans le sens que nous venons d'indiquer que l'on peut dire que la fonction $F(y)$ est développée en série suivant les puissances d'une fonction *arbitraire* $\varphi(y)$. Wronski entend toujours par fonction arbitraire une fonction quelconque généralement, tout en écartant celles qui donneraient lieu à des impossibilités.

Dans le cas présent où la série (4) est destinée à conduire à une valeur déterminée y ou $F(y)$ satisfaisant à l'équation (1), on peut appliquer ce développement en toute sécurité pour une fonction $\varphi(y)$ quelconque, puisque, pour arriver au résultat, autrement dit aux expressions (2) ou (3), la transformation n'a précisément lieu qu'en vue de la valeur déterminée y.

Il en serait de même dans le cas d'une fonction de plusieurs variables, car, bien que l'on ait ainsi un ordre plus ou moins élevé d'indétermination, la quantité y n'en serait pas moins déterminée par les conditions du problème, lesquelles doivent seules être prises ici en considération.

C'est à la circonstance que nous signalons qu'est due la possibilité d'exprimer toutes les solutions de l'équation $\varphi(y) = 0$, au moyen des expressions (2) ou (3).

Principe de convergence de l'expression fondamentale. — En conséquence, pour obtenir une solution déterminée quand l'équation proposée en admet plusieurs, il faut disposer convenablement de la quantité w, en tenant compte de sa nature, qui est essentiellement la même que celle de la quantité y : tel est le point important de la méthode. Il sera facile de voir que cette quantité w doit se rapprocher autant que possible de la solution cherchée en examinant les conditions générales de convergence de l'expression (3).

Pour cela, en reprenant la déduction que nous avons donnée de cette expression, concevons deux quantités v et w telles que $\varphi(v)$ et $\varphi(w)$ soient différents de zéro; nous aurons, en vertu de l'identité des coefficients de la série (4) portant mêmes indices, et en faisant $\mu = 0$,

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} A_0 &= \Xi_0 - \Xi_1\varphi(w) + \Xi_2[\varphi(w)]^2 - \ldots \\ &= \Xi'_0 - \Xi'_1\varphi(v) + \Xi'_2[\varphi(v)]^2 - \ldots, \end{aligned} \right.$$

$\Xi'_0, \Xi'_1, \Xi'_2, \ldots$ étant ce que deviennent les coefficients $\Xi_0, \Xi_1, \Xi_2, \ldots$ quand on substitue v à w. Si la quantité w se rapproche de v, les coefficients $\Xi_0, \Xi_1, \Xi_2, \ldots$ tendront respectivement vers les valeurs des coefficients $\Xi'_0, \Xi'_1, \Xi'_2, \ldots$, et $\varphi(w)$ tendra vers $\varphi(v)$, de sorte qu'à la limite l'égalité (8) aura lieu terme à terme.

Admettons maintenant que nous prenions pour v la quantité u définie par (5), c'est-à-dire $\varphi(u) = 0$; ce que nous venons de dire subsiste encore : le coefficient Ξ'_μ prend la valeur déterminée

$$(9)\quad \Xi_\mu = \frac{\begin{vmatrix} d\varphi(u) & 0 & 0 & \ldots & \ldots\ldots\ldots & dF(u) \\ d^2\varphi(u) & d^2[\varphi(u)]^2 & 0 & \ldots & \ldots\ldots\ldots & d^2F(u) \\ d^3\varphi(u) & d^3[\varphi(u)]^2 & d^3[\varphi(u)]^3 & \ldots & \ldots\ldots\ldots & d^3F(u) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & d^{\mu-1}F(u) \\ d^\mu\varphi(u) & d^\mu[\varphi(u)]^2 & d^\mu[\varphi(u)]^3 & \ldots & d^\mu[\varphi(u)]^{\mu-1} & d^\mu F(u) \end{vmatrix}}{1^{1|1}\, 1^{2|1}\, 1^{3|1} \ldots 1^{\mu|1} [d\varphi(u)]^{1+2+3+\ldots+\mu}},$$

la dérivée $\frac{d\varphi(u)}{du}$ étant généralement différente de zéro; le coefficient Ξ_μ tend vers Ξ'_μ, quand w se rapproche de u, et $\varphi(w)$ tend vers zéro. Or le second membre de (8) se réduit à $F(u)$; cette égalité tendant à avoir lieu terme à terme, il en résulte que $F(w)$ tend vers $F(u)$ et que la somme des autres termes du premier membre tend vers zéro; par suite, la série est convergente.

Ainsi la condition principale de convergence de l'expression (3) est que la quantité w se rapproche suffisamment de u, autrement dit de la quantité y donnée par l'équation (1), $\varphi(y) = 0$. Quand cette condition sera remplie convenablement, la série sera convergente même dans le cas de $\varphi(w) > 1$; dans ce cas, la convergence sera opérée par les coefficients de la série, et, si $\varphi(w) < 1$, la convergence sera opérée de plus par la fonction $\varphi(w)$ elle-même. Donc $\varphi(w) < 1$ sera un critérium de la convergence de la série, puisque les coefficients Ξ tendent, en général, vers des quantités finies et déterminées.

Ce que nous disons de l'expression (3) s'applique aussi à l'expression (2), qui n'en est qu'un cas particulier.

Maintenant, nous pouvons reconnaître que, pour obtenir une solution déterminée y_1 de l'équation $\varphi(y) = 0$, la quantité w doit être

prise aussi rapprochée que possible de l'inconnue y_1, car pour $w = y_1$ l'expression (2) ou (3) se réduit à une identité, et, à mesure que w s'éloigne de cette valeur, la série devient moins convergente et peut devenir divergente. Pour la valeur particulière w qui annule la dérivée $\frac{d\varphi(w)}{dw}$, valeur qui diffère généralement de y_1, tous les termes à partir du second étant infinis, l'expression de l'inconnue est *idéale*. La quantité w variant toujours dans le même sens et dépassant la valeur qui donne $\frac{d\varphi(w)}{dw} = 0$, la série redevient simplement divergente et peut même devenir de nouveau convergente, auquel cas une nouvelle valeur y_2 de l'inconnue se trouve déterminée.

On conçoit donc bien, dès maintenant, que les expressions fondamentales (2) et (3) de la méthode secondaire élémentaire soient susceptibles de donner toutes les solutions d'une équation $\varphi(y) = 0$ d'un genre quelconque; pour cela il importe de faire un choix convenable de la quantité arbitraire w.

Procédés secondaires pour obtenir la convergence. — D'après ce qui précède, la condition principale à remplir pour obtenir la convergence consiste dans le choix convenable de la quantité w, mais cette condition n'est pas toujours facile à remplir, ni même possible; il faut donc, pour obtenir la convergence, ce qui est de toute nécessité, recourir dans certains cas à des moyens secondaires. Ces moyens consistent : 1° dans la transformation des séries divergentes en séries convergentes; 2° dans l'emploi de la méthode d'exhaustion, laquelle peut être fréquemment utilisée dans les calculs. On peut aussi faire un emploi simultané de ces deux moyens.

Génération neutre. — Pour la transformation des séries divergentes, le moyen le meilleur, au point de vue des calculs, consiste à transformer la série en fraction continue, puis à obtenir les réduites successives (*voir* la *Philosophie de la Technie*, IIe Section). On obtiendra de la sorte, avec un nombre suffisant de termes, la solution cherchée avec autant d'approximation que l'on voudra. En comparant l'expression (3) à la série (4), on obtiendrait les formules suivantes.

Faisons

$$
(10) \quad \left\{
\begin{aligned}
A_0 &= F(w),\\
A_1 &= -\frac{dF(w)}{d\varphi(w)},\\
A_2 &= \frac{\text{Ш}[d\varphi(w)\,d^2F(w)]}{1^{1|1}\,2^{1|1}\,[d\varphi(w)]^3},\\
A_3 &= -\frac{\text{Ш}[d\varphi(w)\,d^2[\varphi(w)]^2\,d^3F(w)]}{1^{1|1}\,2^{1|1}\,3^{1|1}\,[d\varphi(w)]^6},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;
\end{aligned}
\right.
$$

nous aurons pour expressions donnant des valeurs de l'inconnue de plus en plus approchées,

$$
(11) \quad \left\{
\begin{aligned}
y &= F(w) + A_1\varphi(w),\\
y &= F(w) + \frac{A_1^2\varphi(w)}{A_1 - A_2\varphi(w)},\\
y &= F(w) + \frac{A_1A_2\varphi(w) + (A_2^2 - A_1A_3)[\varphi(w)]^2}{A_2 - A_3\varphi(w)},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\right.
$$

Ces expressions sont celles que Wronski nomme les *progrès* de la *génération neutre* des quantités.

On obtiendrait des formules analogues, correspondant à l'expression (2), en faisant dans celles-ci $F(w) = w$.

Nous indiquerons plus loin en quoi consiste la méthode d'approximation dont nous avons parlé.

Par l'emploi des divers moyens que nous venons d'énumérer, nous arrivons à ce résultat remarquable que la méthode secondaire peut être appliquée dans tous les cas, puisque la convergence des expressions fondamentales est toujours assurée.

Sur la nature de la valeur fondamentale. — Comme nous l'avons vu, cette convergence dépend surtout du choix de la quantité w. Il faut alors considérer deux cas : 1° celui où w est une quantité purement numérique ; 2° celui où w est une véritable fonction.

Quand w est une quantité numérique et quand l'équation (1,

$\varphi(y)=0$, est une équation primitive algébrique ou transcendante, le mode d'application des formules fondamentales (2) et (3) est bien connu; nous ne nous y arrêterons pas.

Si $\varphi(y)=0$ est une équation différentielle, y est fonction au moins d'une variable indépendante x, et la quantité approchée ϖ ne suffit plus pour déterminer y, car les différentielles de l'inconnue, qui ne sont plus nulles, entrent dans les expressions fondamentales. Il faut donc admettre que l'on connaisse des valeurs approchées de l'inconnue et de ses dérivées de différents ordres, correspondant à des valeurs données de la variable indépendante; de cette façon les expressions fondamentales s'appliquent comme dans le cas des équations primitives. Les équations différentielles comprenant des ordres différents d'indétermination par rapport à l'inconnue, la quantité ϖ ne saurait être en général une quantité purement numérique. On doit donc considérer ϖ comme une fonction; c'est en cela que consiste principalement la méthode secondaire.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS PRIMITIVES.

Considérons une équation primitive $\varphi(y)=0$, algébrique ou transcendante; ϖ, n'étant pas une quantité dépendant d'une autre variable x, ne peut être une fonction proprement dite; ϖ n'est ici qu'une simple quantité algébrique ou transcendante, et les conditions qui la déterminent se réduisent en définitive à une équation.

Équation réduite. — Cette équation devra se rapprocher autant que possible de l'équation proposée et être nécessairement résoluble par des procédés connus; elle devra être de même nature que cette dernière et donner le même nombre de solutions. Si ces conditions sont convenablement remplies, cette nouvelle équation donnera une valeur ϖ qui rendra la fonction $\varphi(\varpi)$ aussi petite que possible, et par suite le développement aussi convergent qu'il se pourra.

Wronski nomme cette équation *équation réduite*. Il faut donc, pour obtenir cette équation, réduire l'équation proposée à ce qu'elle a d'essentiel, afin d'en tirer la valeur *fondamentale* ϖ au moyen d'une solu-

tion finie. Pour cela introduisons dans le premier membre de l'équation $\varphi(y) = 0$ une quantité arbitraire ω, de telle façon que la nouvelle fonction $\varphi(y, \omega) = 0$, qui ne sera autre que la fonction proposée pour $\omega = 1$, puisse donner une équation résoluble par les procédés ordinaires pour $\omega = 0$; la quantité w que l'on tirera de cette équation réduite, qui est alors $\varphi(w, 0) = 0$, sera celle que l'on devra porter ensuite dans l'expression (2) ou (3) pour obtenir la valeur de l'inconnue.

Cette quantité auxiliaire ω peut être introduite soit en coefficient, soit en exposant, et cela de bien des manières différentes. Cette quantité peut également être prise parmi les quantités qui existent déjà dans la fonction $\varphi(y)$, comme nous le verrons dans divers exemples.

D'après ce qui précède, la manière la plus convenable d'introduire la quantité auxiliaire ω doit conduire à des équations réduites, résolubles immédiatement, et dans tous les cas d'une manière théorique et finie, en ayant soin de s'écarter le moins possible de la nature générale de l'équation proposée. Nous pourrons donc choisir pour les équations algébriques, parmi les équations résolubles, les équations réciproques, ou plus généralement les équations binômes du même degré que celui de l'équation proposée. Pour les équations transcendantes, dont la forme est variable à l'infini, nous pourrons les ramener à la forme d'équations algébriques, résolubles comme il vient d'être dit.

Sur les solutions théoriques. — Il résulte de cette méthode que l'on distingue toujours deux parties dans la résolution d'une équation : l'une *finie*, w ou $F(w)$, donnée par l'équation réduite, constituant la partie finie de la solution et la partie essentiellement théorique, et l'autre *indéfinie*, existant généralement, formée par l'ensemble des autres termes. Si $\varphi(y) = 0$ n'admet pas de solution finie, ce qui est le cas le plus fréquent, et si l'équation réduite est déterminée de telle façon que l'on ne puisse pas en trouver une autre plus rapprochée de l'équation proposée, la valeur fondamentale que l'on en déduira rendra la fonction $\varphi(w)$ aussi petite qu'il se pourra, et le développement atteindra le maximum de convergence. Par suite, la partie indéfinie de la solution sera réduite à la moindre importance, et celle-ci donnera, au contraire, à la partie finie, qui forme la partie théorique, la plus grande importance qu'elle puisse avoir. Dans ces conditions, il n'y aura plus rien

d'arbitraire dans la solution obtenue, et cette solution sera *théorique*.

Si au contraire on obtient un développement dont on pourrait encore augmenter la convergence, il y aurait dans la formation de l'équation réduite, et par suite dans la valeur fondamentale $\mathfrak{w}$, quelque chose d'arbitraire ; la solution serait alors *technique*.

Tel est le sens que Wronski attribue à ces deux expressions de *solutions théoriques* et *techniques*. Il est évident que l'on peut obtenir une infinité de solutions techniques se rapprochant plus ou moins de la solution théorique ; on ne peut donc pas admettre *a priori* qu'une solution puisse être obtenue sous forme finie : il faut chercher dans quelles conditions la partie indéfinie de la solution peut se réduire à la moindre importance, et l'on verra, par suite, si elle peut s'annuler complètement. Ces conditions dépendent évidemment de la nature des fonctions que l'on admet à figurer dans la solution ; nous reviendrons sur ce sujet ([1]).

Méthode d'exhaustion. — Maintenant disons un mot de la méthode d'exhaustion dont nous avons parlé, méthode qui doit suppléer à l'insuffisance de la convergence de l'expression fondamentale, quand cela se présente. Nous admettons que nous ne puissions former convenablement une équation réduite $\varphi(\mathfrak{w}, 0) = 0$ de telle sorte que l'expression fondamentale (2) ou (3) soit divergente ou trop lentement convergente pour exprimer la solution de l'équation proposée $\varphi(y, 1) = 0$, ou, ce qui revient au même, $\varphi(\mathfrak{w}, \omega) = 0$, quand on donne à la quantité ω la valeur 1.

D'après ce que nous avons vu, nous aurons ordinairement, dans ce cas, $\varphi(\mathfrak{w}, 1) > 1$. Donnons à ω une valeur ω_0 comprise entre zéro et l'unité, telle que $\varphi(\mathfrak{w}_0, \omega_0) < 1$, $\mathfrak{w}_0$ désignant maintenant la valeur fondamentale ; cette condition assurera la convergence du développement et donnera une solution $\mathfrak{w}_1$, qui, sans être la solution cherchée, s'en rapprochera davantage que la valeur $\mathfrak{w}_0$ donnée par l'équation réduite. Prenons à son tour $\mathfrak{w}_1$ comme valeur fondamentale, si $\varphi(\mathfrak{w}_1, 1) < 1$, on pourra obtenir avec une convergence suffisante la solution cherchée. Autrement nous prendrons une valeur ω_1 de la quantité auxiliaire ω,

---

([1]) La recherche de ces conditions fait l'objet de la méthode suprême.

comprise entre ω_0 et l'unité, de telle sorte que $\varphi(w_1, \omega_1) < 1$. La valeur w_1 portée dans l'équation fondamentale donnera une seconde valeur w_2, laquelle, étant considérée à son tour comme valeur fondamentale, donnera la solution cherchée si $\varphi(w_2, 1) < 1$.

On pourra ainsi faire plusieurs substitutions des quantités w_0, w_1, w_2, ..., données au moyen des quantités auxiliaires ω_0, ω_1, ω_2, ... ; mais le nombre en sera toujours restreint, par la raison que les déterminations successives des quantités ω contenues entre zéro et l'unité ne sauraient être nombreuses (*voir*, pour la méthode secondaire élémentaire et pour la méthode d'exhaustion applicable dans ce cas, *la Réforme*, t. I, p. lxxviij à lxxxiv).

Premier exemple. — Pour éclaircir les développements que nous venons de donner sur la méthode secondaire, nous pouvons appliquer cette méthode à un exemple. Devant traiter spécialement des équations algébriques dans la méthode secondaire systématique, nous laisserons provisoirement ces équations. Pour l'instant, nous allons résoudre une équation transcendante dont Wronski a donné la solution (voir *la Réforme*, t. I, p. cccxxij et cccxxiij).

Soit le système d'équations

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} \sin\xi = \dfrac{r\mu\nu}{\theta e \mathrm{H} g}\,\dfrac{\varphi\cos\alpha + \sin(\alpha - \omega)}{\cos\alpha}, \\[2mm] \operatorname{tang}\omega = \dfrac{\theta e}{r}\,\dfrac{1 - \cos\xi}{\xi}; \end{cases}$$

les quantités ξ et ω sont les inconnues, et les autres des constantes. Posons, pour abréger,

$$(\alpha)' \qquad n = \frac{\theta e}{r}, \quad m = \frac{\mu\nu}{\mathrm{H}g} \quad \text{et} \quad p = \frac{1 - \cos\xi}{\xi}.$$

D'après les conditions du problème, les constantes m et n sont sensiblement égales, la première à $\frac{1}{3}$ et la seconde à l'unité, ou du moins s'écartent peu de ces valeurs; quant aux angles α et φ, ce sont de très faibles quantités.

Nous pourrons écrire ainsi les équations proposées :

$$(\beta)\qquad \begin{cases} \sin\xi = \dfrac{m}{n}\,\dfrac{\varphi\cos\alpha + \sin(\alpha - \omega)}{\cos\alpha}, \\ \operatorname{tang}\omega = np. \end{cases}$$

Or la première équation donne

$$\frac{n}{m}\sin\xi = \operatorname{tang}\alpha\cos\omega - \sin\omega + \varphi,$$

et, substituant ici la valeur de $\sin\omega$ tirée de la deuxième équation (β), nous avons

$$1 = (1 + n^2p^2)\cos^2\omega.$$

Enfin, éliminant $\cos\omega$ entre les deux dernières équations, il vient

$$(\gamma)\qquad \left(\frac{n}{m}\sin\xi - \varphi\right)\sqrt{1 + n^2p^2} = \operatorname{tang}\alpha - np.$$

Telle est l'équation qu'il s'agit de résoudre; en effet, connaissant l'angle ξ, la deuxième équation (α) donnera l'inconnue ω.

Remarquons que la quantité $p = \frac{1 - \cos\xi}{\xi}$ est toujours plus petite que l'unité; de plus, n étant sensiblement égal à l'unité, la quantité $\sqrt{1 + n^2p^2}$ différera généralement peu de l'unité; nous pouvons donc former l'équation réduite de la manière suivante :

$$(\delta)\qquad \left(\frac{n}{m}\sin\xi - \varphi\right)\left(\sqrt{1 + n^2p^2}\right)^a = \operatorname{tang}\alpha - np.$$

Nous désignons ici par a la quantité auxiliaire que nous avons jusqu'ici exprimée par ω, pour ne pas la confondre avec l'angle ω qui est une des inconnues des équations (α). L'équation (δ) pour $a = 1$ reproduit l'équation (γ) et pour $a = 0$ donne l'équation réduite

$$(\delta)'\qquad \frac{n}{m}\sin\xi - \varphi = \operatorname{tang}\alpha - np.$$

Afin de distinguer la valeur fondamentale tirée de cette équation de la valeur ξ de l'inconnue, nous mettrons ψ à la place de ξ dans l'équation réduite, comme nous avons mis w à la place de y pour l'exposition de la méthode. Nous aurons ainsi pour équation réduite

$$(\varepsilon) \qquad \frac{n}{m}\sin\psi - \varphi = \operatorname{tang}\alpha - nq,$$

en faisant

$$(\varepsilon)' \qquad q = \frac{1-\cos\psi}{\psi}.$$

La solution donnée par Wronski indique que l'équation réduite a été formée en introduisant d'une manière différente la quantité auxiliaire a; l'équation (δ) devrait être alors

$$(\zeta) \quad \left(\frac{n}{m}\sin\xi - \varphi\right)\left(\sqrt{1+n^2p^2} + \frac{\sqrt{1+n^2p^2(a-1)^2}}{a-1} - \frac{1}{a-1}\right) = \operatorname{tang}\alpha - np.$$

Pour $a = 1$ on a aussi l'équation proposée (γ), et pour $a = 0$ on a l'équation réduite (δ)'.

Nous pouvons nous en tenir à l'équation (ε), que nous allons d'abord résoudre.

Substituons aux quantités $\sin\psi$ et $\cos\psi$ les valeurs données par les égalités

$$\sin\psi = 2\sin\tfrac{1}{2}\psi\cos\tfrac{1}{2}\psi,$$
$$1-\cos\psi = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\psi.$$

L'équation réduite devient

$$(\eta) \qquad \sin\psi = \frac{m}{n}\,\frac{\varphi + \operatorname{tang}a}{1 + \dfrac{m}{\psi}\operatorname{tang}\dfrac{1}{2}\psi}.$$

Désignons par X le rapport suivant, très peu variable pour de faibles

valeurs de ψ :

$$(\theta) \qquad X = \frac{1}{\psi}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi.$$

L'équation (η) s'écrira

$$(\eta)' \qquad \sin\psi = \frac{m}{n}\frac{\varphi + \operatorname{tang}\alpha}{1 + mX}.$$

L'angle cherché ξ est compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, et, comme X est une quantité très peu variable, on pourra, pour avoir une première valeur suffisante de X, prendre pour ψ une valeur moyenne de 30°, ce qui donnera environ $X = \frac{4}{7}$. L'équation $(\eta)'$ donnera ainsi la valeur fondamentale ψ.

La quantité q donnée par $(\varepsilon)'$ peut s'écrire

$$(\iota) \qquad q = \frac{1 - \cos\psi}{\psi} = X \sin\psi,$$

et sa dérivée est

$$(\iota)' \qquad \frac{dq}{d\psi} = \frac{1}{\psi}\sin\psi(1 - X).$$

Enfin, si l'on change ψ en ξ, q en p et X en Y, l'équation proposée (γ) devient

$$(\varkappa) \qquad \left(\frac{n}{m}\sin\xi - \varphi\right)\sqrt{1 + n^2 Y^2 \sin^2\xi} = \operatorname{tang}\alpha - nY\sin\xi.$$

Telle est la forme la plus convenable pour appliquer la méthode secondaire.

La quantité inconnue est ξ, mais la quantité cherchée est $\sin\xi$; nous aurons donc recours à l'expression (3), que nous écrirons

$$(\lambda) \qquad F(y) = F(w) - \varphi(w)\frac{dF(w)}{dw}\frac{1}{\frac{d\varphi(w)}{dw}} + \ldots.$$

Puisque $F(y)$ est ici $\sin\xi$, nous mettrons pour $F(w)$

$$(\mu) \qquad \sin\psi \quad \text{ou} \quad \frac{m}{n}\,\frac{\varphi + \operatorname{tang}\alpha}{1 + mX},$$

et pour $\dfrac{d\,F(w)}{dw}$

$$(\mu)' \qquad \cos\psi\,;$$

$\varphi(w)$ est

$$(\nu) \qquad \left(\frac{n}{m}\sin\psi - \varphi\right)\sqrt{1 + n^2 X^2 \sin^2\psi} - \operatorname{tang}\alpha + nX\sin\psi,$$

et, puisque ψ satisfait à l'équation réduite (ε), on peut écrire cette quantité

$$(\nu)' \qquad (\operatorname{tang}\alpha - nX\sin\psi)\left(\sqrt{1 + n^2 X^2 \sin^2\psi} - 1\right).$$

La dérivée de $\varphi(w)$ prise sur l'expression (ν), en ayant égard à (ι) et (ι)$'$, peut s'écrire

$$\frac{n}{m}\cos\psi\left[\sqrt{1 + n^2 X^2 \sin^2\psi} + m\frac{\operatorname{tang}\psi}{\psi}(1 - X)\left(1 - \operatorname{tang}\alpha\frac{nX\sin\psi}{\sqrt{1 + n^2X^2\sin^2\psi}} + \frac{n^2X^2\sin^2\psi}{\sqrt{1 + n^2X^2\sin^2\psi}}\right)\right].$$

En développant les radicaux $\sqrt{1 + n^2 q^2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1 + n^2 q^2}}$, et faisant

$$(\nu)'' \qquad \begin{cases} \Omega = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2.4}n^2q^2 + \dfrac{1^{2|2}}{2^{3|2}}n^4q^4 - \dfrac{1^{3|2}}{2^{4|2}}n^6q^6 + \ldots, \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{1 + n^2q^2}} = 1 - \dfrac{1}{2}\,n^2q^2 + \dfrac{1^{2|2}}{2^{2|2}}n^4q^4 - \dfrac{1^{3|2}}{2^{3|2}}n^6q^6 + \ldots, \\[2ex] \Phi = \dfrac{\operatorname{tang}\alpha + n}{\sqrt{1 + n^2q^2}}, \end{cases}$$

on a définitivement, pour $\varphi(w)$ et $\dfrac{d\varphi(w)}{dw}$,

$$(\xi)\quad \left\{\begin{array}{l} (\operatorname{tang}\alpha - n\mathrm{X}\sin\psi)\Omega, \\ \dfrac{n}{m}\cos\psi\left[1 + m\dfrac{\operatorname{tang}\psi}{\psi}(1 - \Phi nq) + \Omega n^2 q^2\right]. \end{array}\right.$$

Faisons dans (λ) les substitutions de $\mathrm{F}(w)$, $\varphi(w)$ et de leurs dérivées, nous obtenons

$$(o)\quad \left\{\begin{array}{l} \sin\xi = \dfrac{n}{m}\dfrac{\varphi + \operatorname{tang}\alpha}{1 + m\mathrm{X}} \\ \qquad - mn\operatorname{tang}\alpha\dfrac{\Omega(\mathrm{X}\sin\psi)^2}{1 + \dfrac{m}{\psi}\operatorname{tang}\psi(1 - \mathrm{X})(1 - \Phi nq) + \Omega n^2 q^2} \\ \qquad + mn^2\dfrac{\Omega(\mathrm{X}\sin\psi)^3}{1 + \dfrac{m}{\psi}\operatorname{tang}\psi(1 - \mathrm{X})(1 - \Phi nq) + \Omega n^2 q^2} + \ldots. \end{array}\right.$$

Telle est la solution de l'équation proposée (γ) ou ($\varkappa$). L'équation réduite différant très peu de l'équation proposée, cette expression est très convergente et les termes calculés sont suffisants.

Cette solution diffère de celle donnée par Wronski en ce que nous avons de plus les quantités Φnq et $\Omega n^2 q^2$. D'après les données de la question, ces quantités sont complètement négligeables ; mais nous les avons trouvées parce que cette solution est obtenue par la méthode élémentaire, tandis que Wronski obtient la sienne par la méthode systématique. On peut voir par cet exemple l'avantage de cette dernière méthode sur celle que nous traitons, puisqu'elle élimine des fonctions qui sont négligeables par elles-mêmes.

Remarquons encore que la fonction Ω doit se réduire à la valeur $\frac{1}{2}$, puisque les quantités $n^2 q^2$, $n^4 q^4$, ... sont négligeables. Cette fonction Ω, donnée par la première équation (ν)'', diffère un peu de celle que donne Wronski, savoir

$$\Omega = \frac{1}{2} - \frac{1.3}{2.4}n^2 q^2 + \frac{1^{3|2}}{2^{3|2}}n^4 q^4 - \ldots$$

Cette différence tient encore à la méthode que nous avons employée, mais elle tient aussi à la forme que nous avons donnée à l'équation transformée (∂) ou (ζ), ainsi que nous le verrons plus loin en reprenant l'équation proposée à l'occasion de la méthode secondaire systématique.

Digression sur les séries.

Il nous a été fait quelques observations au sujet d'une méthode de Wronski dont nous avons commencé l'exposition ; elles se résument en ceci :

Pourquoi n'avoir pas donné la démonstration de la formule (3) ?

Que veut dire : transformation d'une série divergente en série convergente ?

Nous devons donner d'abord des explications à cet égard. On a toujours reproché à Wronski, avec raison, de n'avoir jamais donné d'exemples pour éclaircir et même prouver par des faits la réalité des découvertes qu'il avait annoncées. Pénétré de cette idée, nous nous sommes proposé de présenter d'abord un des résultats les plus importants, celui de la résolution ou de l'intégration d'équations quelconques ; nous laissons provisoirement de côté tout ce qui se rattache trop particulièrement aux questions de principe ou de théorie, nous réservant de reprendre ces questions, qui forment notre principal travail, dès que nous aurons présenté quelques exemples d'intégration.

La démonstration de la formule (3) exige la connaissance de la théorie des séries de Wronski, théorie que nous exposerons plus tard. Nous ne pouvions donc, sans faire une digression qui nous eût écarté de notre véritable sujet, donner la démonstration de la formule (3). Nous avons pensé que, la formule (2) étant connue depuis longtemps, il suffisait pour l'instant de la présenter, ainsi que la formule (3), en indi-

quant bien que la quantité w, considérée jusqu'à présent comme un nombre arbitraire, doit encore être prise comme une fonction arbitraire. C'est là le point essentiel, que nous demandons au lecteur de vouloir bien admettre provisoirement.

Pour ce qui concerne la deuxième observation, nous aurions dû expliquer le sens dans lequel nous employons l'expression de *transformation de série divergente en série convergente;* mais cela nous eût encore fait retomber sur la théorie des séries. Sans entrer dans les détails et en nous tenant pour l'instant aux exemples, voici ce que nous dirons :

Il existe des transformations de séries connues depuis fort longtemps. M. Bertrand dans son *Traité de Calcul différentiel* (p. 255), dit, à propos d'une formule de transformation due à Euler : « La transformation d'une série divergente, lors même qu'elle donne naissance à une série convergente, doit être considérée comme insignifiante, à moins qu'une nouvelle démonstration ne vienne lui donner un sens; cette démonstration peut quelquefois être faite, parce que la série transformée et la série primitive, étant démontrées égales lorsque toutes deux sont convergentes, fournissent deux développements de la même fonction. S'il arrive ensuite que l'une d'elles devienne divergente pour une certaine hypothèse, l'autre, demeurant convergente, représentera encore la fonction, justifiant en apparence ceux qui prétendraient que l'autre série la représente encore après être devenue divergente, et qui se trouveraient dans le vrai pour avoir commis la double erreur d'accepter une transformation qui n'est plus légitime et une série qui, étant divergente, ne représente plus rien. » M. Bertrand considère ensuite, à titre d'exemple, la série qui donne $l(1-2x)$. Nous reprendrons tout à l'heure l'exemple de séries logarithmiques.

Ainsi il est connu que l'on peut transformer des séries divergentes en séries convergentes, pourvu que l'on prenne certaines précautions, et quand les développements sont ceux d'une même fonction.

Cette citation suffirait, il nous semble, pour justifier ce que nous avons dit, d'autant plus que nous n'avons parlé que de séries provenant de développements de fonctions.

Pour ce qui concerne Wronski, il faut observer qu'il n'envisage absolument que les séries définies de cette manière; quant aux séries qui

ne se présentent pas immédiatement comme développements de fonctions, par exemple les séries numériques, il les ramène au cas précédent, soit d'après les conditions mêmes de la question, quand cela est possible, soit par une supposition purement arbitraire. Une série quelconque étant alors supposée remplir une première condition reconnue nécessaire, il est permis de chercher un autre développement de la fonction que représente la série. Or la substitution d'une série à une autre est généralement possible, car Wronski démontre, c'est là encore un point essentiel, qu'un développement ne peut représenter à la fois deux fonctions différentes; il en résulte que deux développements d'une même fonction, sans même considérer leur état de convergence ou de divergence, sont bien *équivalents*. Cette équivalence peut se traduire par certaines relations entre les termes correspondants, lesquelles ne sont autres que les formules de transformation.

Pour la transformation des séries numériques, les diverses suppositions que l'on peut faire, d'après Wronski, dans la recherche de la fonction hypothétique, conduiront quelquefois à un résultat unique, et quelquefois à des résultats différents, comme on peut le prévoir; nous en donnerons bientôt un exemple.

On peut dire par abréviation qu'une série, convergente ou non, a généralement une *valeur*, qui est celle de la fonction qu'elle représente, tandis que, en laissant au mot *somme* son sens ordinaire, la *somme d'une série* ne se dira que d'une série convergente.

Revenons à la définition des séries. La manière dont Wronski les envisage permet d'éviter les difficultés que l'on rencontre ordinairement dans l'usage de cet algorithme, et ensuite de pouvoir, comme conséquence éminemment pratique, substituer en général à un développement quelconque donné un développement plus convergent.

Examinons donc ce qui caractérise, d'une part, la définition ordinaire des séries et, d'autre part, celle de Wronski.

On donne habituellement la définition suivante :

Une série est une suite illimitée de termes formés d'après une loi déterminée; elle est *convergente* quand la somme d'un nombre de termes de plus en plus grand, pris dans l'ordre même de la série, tend vers une limite déterminée. Une série est *divergente* quand cette condition n'est pas remplie.

Cette définition est insuffisante, car elle ne remplit pas les conditions que toute définition doit remplir; elle n'apprend rien sur la propriété fondamentale des séries, ou, si l'on veut, sur l'origine même des séries; elle n'implique à proprement parler qu'une *règle de formation des séries*. Aussi n'est-il ordinairement donné que des *règles de convergence*, et les propriétés générales que l'on connaît sont déduites de principes étrangers à la définition précédente des séries.

La définition de Wronski est au contraire une véritable définition; elle contient en elle-même le principe fondamental des séries, celui de représenter une fonction; par suite, ce géomètre déduit de ce seul principe leurs propriétés générales, celles qui sont relatives à leur convergence et à leur transformation.

Nous devons d'abord dire quelques mots sur les développements des fonctions considérés dans toute leur généralité, et nous prévenons expressément que nous ne donnons ce qui suit qu'à seul titre d'indication. Les propositions que nous allons énoncer sont loin d'être évidentes; nous y reviendrons plus tard; en attendant, on pourra consulter la seconde Section de la Technie.

Wronski considère deux sortes de développements des fonctions. Le premier offre une généralité telle, que les séries proprement dites n'en forment plus qu'un cas particulier, comme on va le voir.

Ce premier développement est

$$(\alpha) \qquad F(x) = A_0 + A_1\Omega_1(x) + A_2\Omega_2(x) + A_3\Omega_3(x) + \ldots;$$

$F(x)$ est la fonction donnée, et $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$, ... sont des fonctions généralement *arbitraires*. Pour effectuer leur détermination il faut avoir égard aux conditions du problème, mais celles-ci sont insuffisantes; il faut alors recourir à d'autres conditions qui dépendent du but en vue duquel la question est traitée.

A_0, A_1, A_2, ... sont des coefficients qui dépendent des fonctions susdites. Il suit de là une conséquence importante : une fonction comporte en général un nombre indéfini de formes différentes, autrement dit de développements différents.

Les relations qui existent entre les coefficients A_0, A_1, A_2, ... et les fonctions F, Ω_1, Ω_2, ... constituent ce que Wronski appelle la *loi*

suprême; les déterminations des fonctions Ω_1, Ω_2, Ω_3, ... les mieux appropriées à la nature de la question constituent la *méthode suprême.*

D'après le même géomètre, les développements en séries ne sont que des cas particuliers du développement précédent (α); si $F(x)$ est la fonction à développer, en effectuant les opérations suivantes

$$(\beta)\quad\left\{\begin{array}{l} F(x) = A_0 + F_1(x), \\ F_1(x) = \varphi_1(x)[A_1 + F_2(x)], \\ F_2(x) = \varphi_2(x)[A_2 + F_3(x)], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array}\right.$$

ainsi de suite indéfiniment, on obtient le développement que Wronski appelle *série générale :*

$$(\gamma)\quad F(x) = A_0 + A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_1(x)\varphi_2(x) + A_3\varphi_1(x)\varphi_2(x)\varphi_3(x) + \dots$$

A_0, A_1, A_2, A_3, ... sont des constantes, et $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ... des fonctions arbitraires de la variable x, qui néanmoins doivent satisfaire à la condition que les rapports

$$(\delta)\qquad \frac{F_1(x)}{\varphi_1(x)},\quad \frac{F_2(x)}{\varphi_2(x)},\quad \frac{F_3(x)}{\varphi_3(x)},\quad \dots$$

ne soient pas infinis pour les valeurs qui annulent les fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... Les fonctions $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... déterminées par les fonctions $F(x)$ et $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... sont d'ailleurs éliminées. Si l'on s'arrête dans la série (γ) après le terme $A_3\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,\varphi_3(x)$, par exemple, la *quantité complémentaire* est

$$F_3(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,\varphi_3(x),$$

et la partie essentielle de ce reste, $F_3(x)$, est une fonction qui dépend nécessairement de $F(x)$; ainsi la considération de la fonction $F_3(x)$ n'est d'aucune utilité au point de vue théorique, puisqu'en cherchant à l'évaluer on ne peut que retomber sur la question même.

Les relations qui existent entre les coefficients A et les fonctions F et φ constituent la *loi des séries ;* ainsi qu'on le verra plus tard, ces coefficients contiennent les différences ou les différentielles de tous les ordres des fonctions F et φ ; par suite, la série, étant supposée représenter la fonction $F(x)$, doit contenir les différences ou les différentielles de tous les ordres de la fonction proposée ; c'est pour cette raison que l'on ne peut substituer à une série qui contient un nombre indéfini de termes un nombre fini de termes accompagnés d'une quantité complémentaire, autrement dit un polynôme algébrique suivi d'une autre fonction.

Par là même que les termes d'une série sont des fonctions déterminées des dérivées des fonctions F et φ, on ne peut en principe changer l'ordre des termes de la série sans la modifier entièrement ; il est évident que cette remarque s'étend aussi aux séries numériques.

Sous la forme donnée (γ), les coefficients A_0, A_1, A_2, ... deviennent indéterminés quand les fonctions φ_1, φ_2, φ_3, ... deviennent identiques ; c'est pourquoi Wronski substitue à (γ) la forme suivante, qui n'offre pas cet inconvénient :

$$(\varepsilon) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x) = A_0 + A_1\varphi(x, a, b, \ldots) + A_2, \varphi(x, a, b \ldots)^{2|\xi,\alpha,\beta,\ldots} \\ + A_3, \varphi(x, a, b_1 \ldots)^{3|\xi,\alpha,\beta,\ldots} + \ldots \end{aligned} \right.$$

Nous employons ici la notation des *facultés algorithmiques*, qui sont définies par la relation

$$(\varepsilon)' \quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi(x, a, b, \ldots)^{n|\xi,\alpha,\beta,\ldots} \\ &\quad = \varphi(x, a, b, \ldots)\,\varphi(x+\xi, a+\alpha, b+\beta, \ldots) \\ &\qquad \times \varphi(x+2\xi, a+2\alpha, b+2\beta, \ldots)\ldots \\ &\qquad \times \varphi[x+(n-1)\xi, a+(n-1)\alpha, b+(n-1)\beta, \ldots]. \end{aligned} \right.$$

Il ne reste plus qu'une fonction arbitraire φ, que Wronski nomme *mesure* de la série, mais il entre dans cette fonction un nombre indéfini de paramètres arbitraires a, b, ..., ainsi que leurs accroissements α, β, ...

Maintenant considérons le cas particulier dans lequel les paramètres

restent constants :

$$(\zeta) \qquad F(x) = A_0 + A_1\,\varphi(x) + A_2\,\varphi(x)^{2|\xi} + A_3\,\varphi(x)^{3|\xi} + \ldots,$$

et même celui-ci

$$(\eta) \qquad F(x) = A_0 + A_1\,\varphi(x) + A_2\,\varphi(x)^2 + A_2\,\varphi(x)^3 + \ldots,$$

dans lequel l'accroissement fini ξ devient indéfiniment petit dx.

Quand la série contient des facultés algorithmiques, la loi de la série contient les différences des fonctions F et φ; quand les facultés se réduisent à de simples puissances, comme pour la série (η), les différences deviennent des différentielles.

Il ne faut pas confondre le développement (α) avec la série (γ), comme Lacroix avait cru pouvoir le faire; la série (γ) est un cas particulier du développement (α).

Le principe de la convergence des séries de Wronski dérive de leur définition; ce principe s'exprime algébriquement par la condition que les rapports (δ) tendent vers des quantités constantes.

Seconde conséquence importante : la fonction $F(x)$ se trouve complètement déterminée par l'ensemble des coefficients du développement, car aucune autre fonction, dans le procédé indiqué, ne saurait donner la même suite de coefficients et la même loi de leur génération. Ainsi, quel que soit l'état de convergence ou de divergence de la série, la loi des coefficients donne la détermination rigoureuse de la série, sans addition d'aucune quantité complémentaire.

Wronski résume ce qui précède dans la proposition suivante :

Les séries prises dans leur généralité comme convergentes ou non convergentes ont par elles-mêmes, dans le nombre indéfini de leurs termes, et sans le secours d'aucune quantité complémentaire, une signification (valeur) déterminée.

Wronski ajoute que la démonstration mathématique de cette proposition se réduit à montrer que l'on peut généralement substituer une série convergente à une série divergente.

Si l'on considère maintenant une série numérique, elle provient ou d'une série contenant une variable (ou plusieurs) à laquelle on donne une valeur particulière, ou bien elle est formée directement par une suite de nombres donnés par une certaine loi.

Dans ce dernier cas, si la série est divergente, c'est-à-dire si l'on ne peut faire la sommation des termes, il n'y a rien à en tirer sans une supposition particulière. Si l'on admet alors qu'une telle suite puisse provenir d'une série contenant une variable, il se présente la question de rechercher quelle est la fonction qu'elle peut représenter; il y a quelquefois utilité à le faire; on peut alors, d'après l'hypothèse, substituer à une série numérique une autre qui lui sera équivalente.

Il nous reste donc à examiner comment on peut passer d'une série à une autre équivalente. Soit donnée la série

$$(\theta) \qquad F(x) = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 f(x) + \mathfrak{A}_2 f(x)^{2|\xi} + \mathfrak{A}_3 f(x)^{3|\xi} + \ldots.$$

Wronski trouve que dans la série par hypothèse équivalente

$$(\theta)' \qquad F(x) = A_0 + A_1 \varphi(x) + A_2 \varphi(x)^{2|\xi} + A_3 \varphi(x)^{3|\xi} + \ldots$$

la fonction arbitraire $\varphi(x)$ peut se ramener à quatre types différents, qu'il nomme *schémas de convergence*. Le plus usuel est de la forme

$$\frac{x}{n+x} - \frac{a}{n+a} \quad \text{ou} \quad \frac{n}{n+a}\left(\frac{x-a}{n+x}\right),$$

n et a étant des constantes arbitraires. Prenons pour exemple le cas le plus simple, celui où la série (θ) se réduit à la série de Taylor, savoir

$$(\iota) \quad F(x) = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1(x-a) + \mathfrak{A}_2(x-a)^2 + \mathfrak{A}_3(x-a)^3 + \ldots;$$

la série équivalente sera, en faisant $\varphi(x) = \dfrac{x-a}{n+x}$,

$$(\iota)' \quad F(x) = A_0 + A_1\frac{x-a}{n+x} + A_2\left(\frac{x-a}{n+x}\right)^2 + A_3\left(\frac{x-a}{n+x}\right)^3 + \cdots;$$

les relations entre les coefficients $\mathfrak{A}$ et A seront

$$(\iota)'' \left\{\begin{aligned} \mathfrak{A}_0 &= A_0, \\ \mathfrak{A}_1(n+a) &= A_1, \\ \mathfrak{A}_2(n+a)^2 &= A_2 - A_1, \\ \mathfrak{A}_3(n+a)^3 &= A_3 - 2A_2 + A_1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \mathfrak{A}_\mu(n+a)^\mu &= A_\mu - \frac{\mu-1}{1} A_{\mu-1} + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2} A_{\mu-2} \\ &\quad - \frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3} A_{\mu-3} + \dots \end{aligned}\right.$$

Il peut être utile de connaître directement le coefficient général de la seconde série (ι) : on a, d'après la première $(\iota)'$

$$\mathfrak{A}_\mu = \frac{1}{1.2.3\dots\mu} \frac{d^\mu F(a)}{da^\mu},$$

puis, en résolvant le système des équations $(\iota)''$,

$$(\varkappa) \left\{\begin{aligned} A_\mu &= (n+a)\mathfrak{A}_1 + \frac{\mu-1}{1}(n+a)^2 \mathfrak{A}_2 \\ &\quad + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2}(n+a)^3 \mathfrak{A}_3 + \dots \end{aligned}\right.$$

La série de Taylor (ι) pouvant en général représenter toute fonction, Wronski énonce encore la proposition suivante :

Toute fonction algorithmique $F(x)$ *peut, avec une mesure généralement* FINIE $(x-a)$, *être engendrée moyennant une série convergente.*

Revenons aux séries formées par une suite de nombres arbitraires : soit

$$(\lambda) \qquad \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \dots$$

une pareille série; nous avons dit que nous supposions une série pro-

prement dite, dont la valeur générale corresponde à une fonction hypothétique $F(x)$, par exemple la série formant le second membre de (ι); il faut observer que la supposition ne saurait avoir lieu effectivement qu'autant qu'il existe une autre fonction $\varphi(x)$ qui puisse donner réellement une suite $A_0 + A_1 + A_2 + \ldots$ correspondant à une série convergente telle que le second membre de $(\iota)'$. Si cela n'a pas lieu, les quantités A seront ou infinies ou indéterminées, ou bien elles pourront donner lieu à des absurdités. D'où cette proposition :

Une série (λ), *formée arbitrairement* (¹), *n'a pas toujours une valeur générale* $F(x)$ *correspondant à toutes les valeurs de la variable* x.

Wronski donne un exemple d'une série telle que (λ), dont les termes sont formés d'après une loi qui n'admet pas une série générale de la forme (θ); cela suffit pour prouver la dernière proposition.

Premier exemple. — Pour bien faire comprendre ce que nous venons de dire, prenons un exemple connu, le développement du logarithme naturel de x, ou

$$(\mu) \qquad (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \ldots$$

Cette série n'est convergente qu'entre 0 et 2; mais, d'après ce que nous avons dit, elle représentera *dans tous les cas* la fonction $L(x)$, parce qu'aucune autre fonction ne peut donner le même développement. Quand cette série est divergente, elle ne peut être évidemment d'aucune utilité pour calculer un logarithme : c'est dans ce cas que les formules $(\iota)''$ ou $(\varkappa)$ permettent d'y substituer immédiatement une série convergente; on a, d'après $(\varkappa)$, en comparant la série (μ) à la série (ι) et faisant $n = 1$,

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 2, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 2\frac{1}{3}, \quad A_4 = 0, \quad A_5 = 2\frac{1}{5}, \ldots,$$

ce qui donne pour la série $(\iota)'$

$$(\mu)' \qquad 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\right],$$

(¹) *Formée arbitrairement* signifie : formée d'après une loi arbitraire.

série bien connue qui est convergente pour toutes les valeurs positives de x.

Pour les valeurs négatives de x, la série proposée et cette dernière sont divergentes; les formules $(\varkappa)$, telles que nous venons de les appliquer, ne pourraient conduire à des séries convergentes, parce que le logarithme d'un nombre négatif, étant imaginaire, ne pourrait être donné par une série dont la valeur serait réelle; il faudrait, pour obtenir un résultat, introduire des quantités imaginaires, lesquelles donneraient lieu à deux séries convergentes A et B, permettant de former la quantité cherchée $A + B\sqrt{-1}$. Nous allons examiner cette transformation sur un autre exemple.

La série proposée (μ), pour $x = 0$, donne la série harmonique

$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\right),$$

dont la somme des termes entre parenthèses est plus grande que toute quantité donnée; la série $(\mu)'$ conduit à un résultat pareil. Or cette quantité infinie est bien à la fois la somme de la série et la valeur de $L(0)$; on ne peut donc pas dire que la série harmonique soit ici divergente, ou bien, si l'on dit que cette série est divergente, il faut reconnaître que cette divergence n'est pas de même nature que celle de la série qui donne, par exemple, le logarithme de 11,

$$(\nu) \qquad 10 - \frac{1}{2}\cdot 10^2 + \frac{1}{3}\cdot 10^3 - \frac{1}{4}\cdot 10^4 + \cdots,$$

puisque cette série ne peut donner par elle-même la valeur du logarithme. La série numérique (ν), en vertu de sa liaison avec la fonction Lx, est équivalente à la série convergente

$$(\nu)' \qquad 2\left(\frac{10}{12} + \frac{1000}{3.1728} + \frac{100000}{5.248832} + \cdots\right),$$

donnée par la série $(\mu)'$.

Second exemple. — Pour second exemple prenons la série provenant

du développement de $(1-2x)^{\frac{1}{2}}$.

$$(\xi)\qquad 1 - x - \frac{1}{2}\frac{1}{1}x^2 - \frac{1}{3}\frac{1.3}{1.2}x^3 - \frac{1}{4}\frac{1.3.5}{1.2.3}x^4 - \ldots.$$

Pour $x=1$, la valeur de la fonction $(1-2x)^{\frac{1}{2}}$ est $\sqrt{-1}$; de plus, la série est divergente, elle devient

$$(\varpi)\qquad 1 - 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\frac{1.3}{1.2} - \frac{1}{4}\frac{1.3.5}{1.2.3} - \ldots.$$

Comparons cette série à la série (ι); en faisant $a=0$, les coefficients seront $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ...; puis substituons-y la série $(\iota)'$. Pour cela posons,

$$n = -\frac{1}{2}\sqrt{-1},$$

et, observant que

$$\frac{x}{x-\frac{1}{2}\sqrt{-1}} = \frac{2x(2x+\sqrt{-1})}{4x^2+1},$$

la nouvelle série sera

$$(\xi)'\qquad A_0 + A_1\frac{2x(2x+\sqrt{-1})}{4x^2+1} + A_2\frac{2^2x^2(2x+\sqrt{-1})^2}{(4x^2+1)^2} + \ldots.$$

On trouverait pour les coefficients

$$A_0 = 1,\quad A_1 = \frac{1}{2}\sqrt{-1},\quad A_2 = \frac{1}{2^3}(1+4\sqrt{-1}),$$

$$A_3 = \frac{1}{2^4}(4+7\sqrt{-1}),\quad A_4 = \frac{1}{2^7}(43+40\sqrt{-1}),$$

$$A_5 = \frac{1}{2^8}(88+39\sqrt{-1}),\quad A_6 = \frac{1}{2^{10}}(261+12\sqrt{-1}),$$

$$A_7 = \frac{1}{2^{11}}(188-89\sqrt{-1}),\quad A_8 = \frac{1}{2^{15}}(-2445+1040\sqrt{-1}),$$

et ainsi de suite; la série (ϖ) devient

$$(\varpi)' \quad \left\{ \begin{aligned} & 1 + \frac{\sqrt{-1}\,(2+\sqrt{-1})}{5} + \frac{(1+4\sqrt{-1})(2+\sqrt{-1})^2}{2.5^2} \\ & \qquad + \frac{(4+7\sqrt{-1})(2+\sqrt{-1})^3}{2.5^3} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

ou, en effectuant les calculs,

$$(\varpi)'' \left\{ \begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{5} - \frac{13}{2.5^2} - \frac{69}{2.5^2} - \frac{1261}{2^3.5^4} - \frac{4943}{2^4.5^6} - \frac{54845}{2^4.5^7} + \frac{1637955}{2^7.5^8} + \ldots\right) \\ & + \sqrt{-1}\left(\frac{2}{5} + \frac{16}{2.5^2} + \frac{58}{2.5^3} + \frac{752}{2^3.5^4} + \frac{2126}{2^3.5^5} + \frac{10080}{2^4.5^6} + \frac{19290}{2^4.5^7} + \frac{273440}{2^7.5^8} + \ldots\right). \end{aligned} \right.$$

Ces deux séries sont très peu convergentes; elles oscillent, la première autour de zéro, et la seconde autour de l'unité, en tendant respectivement vers ces valeurs. Wronski donne les valeurs suivantes :

Pour 2 termes	.....	$+\frac{4}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{-1}$,
3 »	.....	$+\frac{7}{13} + \frac{5}{7}\sqrt{-1}$,
4 »	.....	$+\frac{5}{19} + \frac{20}{21}\sqrt{-1}$,
5 »	.....	$+\frac{1}{85} + \left(1 + \frac{4}{39}\right)\sqrt{-1}$,
6 »	.....	$+\frac{3}{16} + \left(1 + \frac{3}{16}\right)\sqrt{-1}$,
.....	.....	.....
11 »	.....	$-\frac{2}{75} + \left(1 + \frac{31}{123}\right)\sqrt{-1}$,
12 »	.....	$+\frac{7}{76} + \left(1 + \frac{7}{29}\right)\sqrt{-1}$,

Troisième exemple. — Considérons pour dernier exemple la série

$$(\rho) \qquad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots;$$

admettons qu'elle provienne du développement de $\frac{1}{1+x}$

$$(\sigma) \qquad 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots$$

pour la valeur $x = 1$. En comparant cette série (σ) à (ι), on pourra, au moyen des formules $(\varkappa)$, y substituer la série équivalente $(\iota)'$, dont les coefficients sont ici

$$A_0 = 1, \quad A_1 = -n, \quad A_2 = n^2 - n,$$
$$A_3 = -n^3 + 2n^2 - n, \quad A_4 = n^4 - 3n^3 + 3n^2 - n, \ldots;$$

par suite on a la série transformée

$$(\sigma)' \quad 1 - n\frac{x}{n+x} + n(n-1)\frac{x^2}{(n+x)^2} - n(n-1)^2\frac{x^3}{(n+x)^3} + \cdots,$$

série évidemment convergente pour $x = 1$, quelle que soit la valeur positive et finie de n, et dont la valeur est $\frac{1}{2}$:

$$(\rho)' \qquad 1 - \frac{n}{n+1} + \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} - \frac{n(n-1)^2}{(n+1)^3} + \frac{n(n-1)^3}{(n+1)^4} - \cdots$$

ou

$$1 - \frac{n+1}{n}\left[1 - \frac{n-1}{n+1} + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 + \cdots\right],$$

ou enfin

$$1 - \frac{n}{n+1}\left(\frac{n+1}{2n}\right) = \frac{1}{2},$$

Si $n = 1$, la série $(\sigma)'$ se réduit à

$$1 - \frac{x}{1+x}.$$

Faisons maintenant une seconde hypothèse sur l'origine de la série (ρ); on peut admettre qu'elle provienne du développement de

$\frac{1}{1+x+x^2}$, c'est-à-dire de la série

$$(\tau) \qquad 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + x^9 - x^{10} + \ldots.$$

Il est évident que pour $x = 1$ la série s'identifie avec la série (ρ), tandis que la fonction dont la série (τ) est le développement prend la valeur $\frac{1}{3}$ différente de celle qui précède; de même, si l'on considérait le développement de $\frac{1+x^2}{1+x+x^2}$, c'est-à-dire

$$(\varphi) \qquad 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - \ldots,$$

qui se réduit également à la série (ρ) quand $x = 1$, on aurait encore une valeur différente $\frac{2}{3}$; quant aux formules de transformation, elles donneraient respectivement, en faisant $n = 1$,

$$(\tau)' \quad 1 - \frac{x}{1+x} - \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^5 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^7 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^8 + \cdots,$$

$$(\varphi)' \quad 1 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^5 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^6 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^8 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^9 + \cdots,$$

séries convergentes pour $x = 1$; elles donnent, en effet,

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} - \frac{1}{2^8} + \cdots,$$

$$1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^8} - \frac{1}{2^9} + \cdots.$$

L'exemple des séries (σ), (τ) et (φ), donnant pour $x = 1$ la même suite (ρ) avec des valeurs différentes, est dû à Poisson (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XII, p. 428). Wronski donne la transformation de la série (σ) en $(\sigma)'$ et celle de la série logarithmique qui conduit à la série bien connue $(\mu)'$. Il donne encore l'exemple suivant. La série

$$(\chi) \qquad 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + \ldots$$

peut dériver de

$$(\psi) \qquad 1 + x - x^2 - x^3 + x^4 + x^5 - x^6 - x^7 + \ldots$$

ou de

$$(\omega) \qquad 1 + x - x^3 - x^4 + x^6 + x^7 - x^9 - x^{10} + \ldots.$$

Ces deux séries proviennent respectivement du développement de $\frac{1+x}{1+x^2}$ et de celui de $\frac{1+x}{1+x^3}$, expressions dont les valeurs sont l'unité pour $x = 1$. Les séries (ψ) et (ω) donnent pour transformées, en faisant $n = 1$,

$$(\psi)' \qquad \begin{cases} 1 + \frac{x}{1+x} - 2\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 - 4\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 \\ - 4\left(\frac{x}{1+x}\right)^5 + 8\left(\frac{x}{1+x}\right)^7 + \ldots, \end{cases}$$

$$(\omega)' \qquad \begin{cases} 1 + \frac{x}{1+x} + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 \\ - 9\left(\frac{x}{1+x}\right)^5 - 18\left(\frac{x}{1+x}\right)^6 - \ldots, \end{cases}$$

séries convergentes pour $x = 1$; elles se réduisent en effet à l'unité,

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} - \frac{1}{64} - \ldots,$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{3}{2^4} - \frac{3^2}{2^5} - \frac{3^2}{2^5} - \ldots.$$

Nous pensons que ces exemples très simples suffiront pour montrer la possibilité de *substituer* une série convergente à une série divergente, ou de *transformer* les séries, suivant l'expression de Wronski. Ces exemples montrent aussi comment on peut évaluer des séries numériques en les rapportant à une série générale hypothétique.

En terminant ce court exposé, nous ferons observer que les formules $(\varkappa)$ que nous avons données, se rapportant aux deux séries (ι) et $(\iota)'$, ne sont pas les plus générales que l'on puisse admettre; elles peuvent se trouver en défaut dans certains cas; il faut alors recourir à d'autres

formules ou même essayer les autres schémas de convergence, parmi lesquels, suivant Wronski, on en trouvera toujours un qui réponde à la question proposée.

Ajoutons encore que les deux quantités arbitraires a et n que renferme la série $(\iota)'$ permettent d'augmenter dans certaines limites la convergence du développement de la fonction $F(x)$; ainsi, en laissant à a la valeur 1 et en faisant $n=0$, on obtient pour le logarithme de 2 un développement moins convergent que le développement $(\mu)'$, où $n=1$. Il est bien entendu qu'il ne faut pas ici considérer le même nombre de termes, mais il faut prendre, dans chaque série, tous les termes qui précèdent ceux d'une même puissance de $\frac{x-a}{n+x}$, à laquelle on s'arrête.

Parmi tous les développements d'une même fonction, il en existe un qui possède le maximum de convergence; ce développement peut même quelquefois être limité. Ainsi, au moyen de la série $(\iota)'$, nous obtenons un nombre infini de développements de la fonction $L(x)$; mais, comme on le sait, on en trouverait encore d'autres; l'expression (α) permet d'obtenir tous ceux que l'on désire. Par exemple, si l'on compare $(\iota)'$ et (α), on a

$$\Omega_1(x)=\frac{x-a}{n+x},\quad \Omega_2(x)=\left(\frac{x-a}{n+x}\right)^2,\quad \Omega_3(x)=\left(\frac{x-a}{n+x}\right)^3,\quad \cdots$$

Les fonctions Ω étant toutes arbitraires, nous pouvons admettre que la première quantité n qui entre dans la première fonction Ω_1 soit différente des autres quantités, désignées aussi par n, qui entrent dans les fonctions Ω_2, Ω_3, ...; nous distinguerons la première quantité n par l'indice 1. Cette quantité n_1, complètement arbitraire, peut être généralement une fonction de x; en la déterminant par la condition que $\Omega_1(x)$ représente le mieux possible la fonction $F(x)$, la série complémentaire aura relativement une valeur minima.

D'après cela, il faut satisfaire à la relation

$$d\Omega_1(x)\,d^2F(x)-d^2\Omega_1(x)\,dF(x)=0,$$

ce qui donne

$$(n_1+x)\frac{d^2F(x)}{dx^2}+2\frac{dF(x)}{dx}=0.$$

Ici les coefficients de la série complémentaire diffèrent de ceux de la

série $(\iota)'$. On trouverait

$$(\alpha\alpha)\quad \begin{cases} \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(a) + \dfrac{d\mathrm{F}(a)}{da}\left[1 - (x-a)\dfrac{d^2\mathrm{F}(x)}{dx^2}\,\dfrac{1}{2\dfrac{d\mathrm{F}(x)}{dx}}\right](x-a) \\ \qquad + \Xi_3\left(\dfrac{x-a}{n+x}\right)^3 + \Xi_4\left(\dfrac{x-a}{n+x}\right)^4 + \ldots, \end{cases}$$

en faisant

$$(\alpha\beta)\quad \begin{cases} \Xi_{\mu+1} = (n+a)^{\mu+1}\left\{\dfrac{1}{1^{\mu+1|1}}\,\dfrac{d^{\mu+1}\mathrm{F}(a)}{da^{\mu+1}} - 2\,\dfrac{d\mathrm{F}(a)}{da}\,\dfrac{d^{\mu-1}}{da^{\mu-1}}\left[\dfrac{d^2\mathrm{F}(a)}{d^2a}\,\dfrac{1}{\dfrac{d\mathrm{F}(a)}{da}}\right]\right\} \\ \qquad + \dfrac{\mu}{1}\,\Xi_\mu - \dfrac{\mu^{2|-1}}{1^{2|1}}\,\Xi_{\mu-1} + \dfrac{\mu^{3|-1}}{1^{3|1}}\,\Xi_{\mu-2} - \ldots + (-1)^{\mu-1}\,\dfrac{\mu^{\mu-2|-1}}{1^{\mu-2|1}}\,\Xi_3. \end{cases}$$

En prenant $n = a$, le développement du logarithme de x devient

$$(\alpha\gamma)\quad \begin{cases} \mathrm{L}(x) = \mathrm{L}(a) + \dfrac{(x+a)(x-a)}{2ax} \\ \qquad - 4\left[\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^3 + \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^5 + \dfrac{3}{7}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^7 + \ldots\right]. \end{cases}$$

Pour l'instant, nous ne pouvons donner plus de détails sur ce sujet, qui se trouve traité dans le Tome I de la *Réforme* ou à la fin du troisième Volume de l'*Encyclopédie de Montferrier*.

Nous pensons que cette digression suffit provisoirement pour répondre aux observations que nous avons reçues et dont nous nous sommes efforcé de tenir compte. Le sujet que nous traitons offre des difficultés toutes particulières, et nous n'ignorons pas que la tâche est difficile; nous sommes persuadé, en l'entreprenant, que nous contribuerons à faire connaître des résultats d'une haute importance et d'un intérêt immédiat; aussi demanderons-nous toute l'indulgence du lecteur. Nous accueillerons avec reconnaissance les observations que l'on voudra bien nous transmettre, s'il nous arrivait encore d'employer, par suite de quelque inadvertance, des expressions dont la signification ne paraîtrait pas suffisamment précise, ou même des expressions incorrectes.

Exposé des méthodes en Mathématiques, d'après Wronski

(DEUXIÈME NOTE).

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Sur l'intégration des équations. — Nous venons de voir comment on peut résoudre toute espèce d'équations primitives par la méthode secondaire élémentaire; il nous reste maintenant à examiner comment la même méthode se prête à la résolution des équations non primitives, c'est-à-dire à l'intégration des équations qui contiennent des différences ou des différentielles de la quantité inconnue. Ici encore l'expression fondamentale (3) s'applique avec autant de facilité à ce genre d'équations qu'à celui que nous avons considéré en premier lieu.

Mais, avant d'entamer le sujet, il faut définir ce que l'on entend par intégrer une équation. On dit ordinairement qu'intégrer une équation est trouver plusieurs fonctions, ou une seule, qui satisfassent à l'équation proposée. Cette définition est complète et se trouve par suite suffisante. Cependant on admet d'habitude que la solution doit donner une expression finie; cette condition n'étant pas comprise dans la définition précédente ne présente par elle-même aucune nécessité; si cette condition est admise, elle doit forcément particulariser la forme de la solution. La marche à suivre qui paraît la plus naturelle pour

obtenir une expression finie dans une intégration, ou dans toute autre question, consiste à rechercher d'abord toutes les formes possibles qui conviennent à l'expression de la solution et à en déduire ensuite les conditions qui permettent de réduire une ou plusieurs de ces expressions à une forme finie. La *Méthode suprême* de Wronski est celle qui se prête le mieux à ce genre difficile de questions; pour l'instant nous nous contenterons de faire connaître une méthode qui permet, dans tous les cas, d'obtenir une solution utilisable en pratique; cette solution se présente ordinairement sous forme de suite indéfinie. Il faut se rendre compte que bien souvent les expressions finies que l'on obtiendrait seraient si compliquées qu'elles seraient impossibles à utiliser dans les calculs; nous en donnerons plus tard un exemple remarquable. Au contraire, la méthode générale et pratique dont nous parlons offre une utilité incontestable, car personne n'ignore qu'il existe nombre de questions, et parmi celles-ci des questions importantes, qui n'ont pu être traitées complètement, faute de moyens d'obtenir les solutions.

Voici la marche que nous allons suivre : il résulte de ce que nous avons dit précédemment que l'expression (3) est une expression générale d'une certaine fonction $F(y)$ formée avec la quantité inconnue y, laquelle est donnée par l'équation $\varphi(y) = 0$; cette équation contient en outre, dans le cas qui nous occupe, une variable indépendante x, ou plusieurs variables indépendantes, ainsi que des différences ou des différentielles de l'inconnue et de la variable. La question se trouve donc ramenée à trouver une fonction qui satisfasse au deuxième membre de l'expression (3), problème facile à résoudre comme on peut le prévoir maintenant.

On voit même que la fonction intégrale peut prendre généralement un nombre indéfini de formes essentiellement différentes; ces formes différentes dépendent de la nature des fonctions fondamentales, qui sont admises à figurer dans l'expression définitive; nous allons faire un choix de ces fonctions. On peut s'astreindre, par exemple, à n'admettre que des fonctions exponentielles, ou encore des transcendantes d'un ordre plus élevé; dans la première supposition, on pourra très rarement obtenir pour intégrale une fonction finie, et dans la deuxième on pourra obtenir une fonction intégrale remplissant cette condition, dans des cas d'autant plus fréquents que l'on admettra comme fonctions fon-

damentales un plus grand nombre d'espèces de fonctions. Mais ici se présente un inconvénient très grave : c'est l'introduction d'un nombre de plus en plus grand de ces fonctions dont les propriétés principales devront être connues, et pour lesquelles des tables devront être calculées. Or, cette étude préalable, si elle était étendue à un nombre de plus en plus grand de fonctions, deviendrait bientôt matériellement impossible ; on peut en juger déjà par l'étude des fonctions elliptiques et abéliennes. Cette étude, faite évidemment par des moyens analogues à ceux qui sont appliqués aux fonctions problématiques, conduit, pour être logique et pour éviter des complications très grandes, à cette conséquence que l'on ne doit pas rechercher en général de solutions finies.

Il faut, au contraire, chercher à n'admettre que le nombre le plus restreint de fonctions fondamentales, et nous allons voir que ces fonctions se réduisent seulement aux fonctions exponentielles et à leurs inverses les fonctions logarithmiques. Dans ces conditions, les intégrations sont non seulement toujours possibles, mais elles sont toujours faciles et par conséquent pratiques.

D'ailleurs, d'après ce que nous avons dit à propos de la résolution des équations primitives, nous sommes encore conduit à distinguer dans la solution la partie essentiellement *théorique* de la partie *technique*, et ce que l'on doit chercher, c'est de réduire au minimum la partie technique de la solution au moyen des fonctions fondamentales que l'on se donne *a priori*. Quant à rechercher les conditions pour que cette partie technique s'annule toujours, en laissant alors arbitraire la nature des fonctions fondamentales admises à figurer dans la solution, cela peut être donné par la *Méthode suprême*, comme nous l'avons déjà dit, mais ce n'est qu'un problème particulier qui ne présente ordinairement pas d'utilité dans la pratique.

Il est même facile de concevoir pour quelle raison les solutions finies, en général, n'existent pas théoriquement. On sait en effet que les fonctions qui satisfont aux équations différentielles, ou aux différences finies, sont généralement des fonctions transcendantes, c'est-à-dire, suivant l'acception du mot qui signifie en dehors des conditions du temps, des fonctions dont on ne peut avoir que des valeurs de plus en plus approchées sans pouvoir jamais en obtenir la valeur exacte. Il en résulte naturellement que l'intégration d'une équation doit conduire

à une expression de forme indéfinie, laquelle ne peut se réduire à une forme finie que par l'introduction de conventions particulières, ainsi que nous l'avons indiqué plus haut.

A cette occasion, nous devons dire que Wronski a cependant indiqué un système d'intégration finie au moyen des *facultés algorithmiques*, fonctions découvertes, il y a plus d'un siècle, par Vandermonde et désignées par lui sous le nom d'*irrationnelles d'ordres supérieurs*. Il faut remarquer que les intégrales sont alors données par une seule espèce de fonctions; cette manière d'intégrer, utile dans certaines conditions, ne permet pas de calculer les valeurs numériques des intégrales, parce qu'il faut développer les facultés et que l'on obtient alors, dans la plupart des cas, des développements non convergents; il faut donc effectuer encore une seconde transformation pour obtenir la convergence nécessaire, et l'on retombe sur des expressions auxquelles on pourrait arriver directement par d'autres méthodes. Wronski, dans sa théorie de la chaleur, a donné une équation intégrée par les facultés algorithmiques (voir *Nouveaux systèmes de machines à vapeur*, 1834-1835); il exprime sous forme finie, formule (54) ou (57), l'intégration d'une équation différentielle très élevée, qui donne la loi de la relation de la température intime des corps et de leur densité, et par suite la loi de la force élastique des vapeurs; mais l'Ouvrage n'ayant pas été achevé, l'auteur n'a pu faire connaître l'équation d'où il était parti.

Il n'y a pas lieu de distinguer les équations qui peuvent être intégrées de celles qui ne le peuvent pas, puisque l'on peut toujours satisfaire à une équation donnée, comme nous allons le voir. Seulement on pourra rencontrer des solutions indiquant que l'équation proposée est impossible, si elle a été formée au hasard, c'est-à-dire si elle ne répond à aucun problème que l'on puisse réellement rencontrer. Nous ne nous occuperons pas d'équations ainsi formées, car il est clair que, si l'équation ne représente rien, la solution n'ayant aucune signification, toute

---

(1) On peut voir, dans le programme de l'Ouvrage cité, l'énoncé en lettres italiques du principe fondamental de la Théorie de la chaleur; c'est donc en France, en 1835, que ce principe a été énoncé pour la première fois d'une manière bien précise; plus loin la formule (92) contient l'expression mathématique du même principe.

interprétation que l'on en ferait serait complètement arbitraire et n'aurait aucune valeur. Au contraire, les équations provenant d'un problème offrant une réalité conduisent à des solutions dont la signification est bien déterminée, et ces équations ont une formation analytique qui a été indiquée pour la première fois par Lagrange; cette origine est la seule que l'on ait à considérer ici. Wronski a donné quelques indications à cet égard; voici ce qui en est.

Les équations différentielles doivent être classées, 1° d'après leur ordre d'indétermination, 2° d'après le nombre des variables qu'elles renferment, 3° d'après l'ordre des différentielles de ces variables. Il existe d'autres classifications, mais elles sont accessoires; telles sont celles qui se basent sur le degré de la puissance à laquelle se trouvent élevées les différentielles, ou sur l'ordre d'indétermination où se trouvent les variables.

Puisque nous ne considérons que les questions présentant une entière réalité, nous admettrons nécessairement l'existence d'une ou de plusieurs équations primitives; c'est là la condition principale : les équations différentielles n'en sont par suite que des conséquences.

Soit le premier ordre d'indétermination des équations; supposons d'abord qu'il n'y ait que deux variables et que les différentielles n'entrent qu'au premier ordre : il s'agit de voir comment d'une équation primitive on peut généralement déduire une équation différentielle. Or, une pareille équation ne provient que d'une relation entre l'équation primitive et celle-ci différentiée; de plus, toute relation entre deux équations ne peut s'établir qu'en comparant deux quantités dépendant à la fois de ces équations, ce qui revient à établir l'égalité entre deux fonctions de quantités qui entrent dans les équations; soit donc $\varphi(x,y)$ une fonction comprise dans l'équation primitive que nous écrirons

$$(a) \qquad \Phi[x,y,\varphi(x,y)] = 0;$$

la fonction φ devant se trouver encore dans l'équation précédente différentiée, la relation cherchée s'obtiendra en éliminant φ entre les deux équations. On voit que cette fonction φ ne peut être quelconque, puisqu'elle doit subsister malgré la différentiation de Φ; cette condition se trouvera remplie si la dérivée de Φ par rapport à φ est nulle, parce

qu'alors Φ étant, pour ainsi dire, une fonction invariable de φ, la différentiation de Φ par rapport à la variable indépendante x ne peut avoir d'influence sur la fonction φ, et celle-ci se retrouvera une fois l'opération effectuée. Il faut donc que l'on ait

$$\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right) = 0\,;$$

φ est ici une *fonction singulière*. Mais la quantité φ peut encore se retrouver dans la fonction Φ, après sa différentiation par rapport à x, si φ se réduit à une constante; celle-ci pourra être éliminée et donner lieu à la relation qui forme l'équation générale du premier ordre. En résumé, on sait qu'en différentiant l'équation primitive, ce qui donne

$$(b) \qquad \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)dx + \left(\frac{d\Phi}{dy}\right)dy + \left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)d\varphi = 0,$$

l'élimination de φ entre cette équation et l'équation primitive ne peut avoir lieu que si l'on a

$$(c) \qquad \left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right) = 0, \quad \text{ou} \quad d\varphi = 0.$$

Ainsi une équation différentielle du premier ordre équivaut à deux équations primitives, l'une contenant une fonction singulière $\varphi(x, y)$, l'autre une constante arbitraire.

Si la relation primitive entre deux variables contient plusieurs fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu$ de ces mêmes variables, de telle sorte que l'on ait

$$\Phi[x, y, \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \ldots, \varphi_\mu(x, y)] = 0,$$

en prenant la différentielle totale de Φ, puis la différentielle totale de celle-ci, et ainsi de suite, en effectuant μ opérations successives, on pourra éliminer entre les μ équations différentielles et l'équation primitive les μ fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu$, et obtenir une équation différentielle d'ordre μ. Mais, pour que cette élimination puisse se faire, il faut que la somme des termes qui contiennent les différentielles de

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu$, dans chacune des μ relations différentielles précédentes, soit nulle, ce qui donnera μ équations de condition auxquelles les fonctions φ doivent satisfaire; ces quantités φ y satisferont toujours si elles se réduisent à des constantes. Ainsi l'équation différentielle du $\mu^{\text{ième}}$ ordre équivaut à deux sortes d'équations primitives, l'une contenant μ constantes arbitraires, et l'autre contenant de une à μ fonctions singulières avec un nombre complémentaire de constantes arbitraires. Cela est connu.

Dans le premier ordre d'indétermination des équations renfermant trois variables, soient les deux équations

$$(d) \quad \begin{cases} \Phi_1[x, y, z, \varphi_1(x, y, z), \psi(x, y, z)] = 0, \\ \Phi_2[x, y, z, \varphi_2(x, y, z), \psi(x, y, z)] = 0; \end{cases}$$

φ_1, φ_2 et ψ sont trois fonctions contenues dans les fonctions Φ_1 et Φ_2. On a, en différentiant,

$$(e) \quad \begin{cases} \left(\dfrac{d\Phi_1}{dx}\right)dx + \left(\dfrac{d\Phi_1}{dy}\right)dy + \left(\dfrac{d\Phi_1}{dz}\right)dz + \left(\dfrac{d\Phi_1}{d\varphi_1}\right)d\varphi_1 + \left(\dfrac{d\Phi_1}{d\psi}\right)d\psi = 0, \\ \left(\dfrac{d\Phi_2}{dx}\right)dx + \left(\dfrac{d\Phi_2}{dy}\right)dy + \left(\dfrac{d\Phi_2}{dz}\right)dz + \left(\dfrac{d\Phi_2}{d\varphi_2}\right)d\varphi_2 + \left(\dfrac{d\Phi_2}{d\psi}\right)d\psi = 0, \end{cases}$$

et si l'on a

$$(f) \quad \left(\frac{d\Phi_1}{d\varphi_1}\right)d\varphi_1 + \left(\frac{d\Phi_1}{d\psi}\right)d\psi = 0, \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\Phi_2}{d\varphi_2}\right)d\varphi_2 + \left(\frac{d\Phi_2}{d\psi}\right)d\psi = 0,$$

on pourra éliminer entre les quatre premières équations deux des trois fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \psi$, ou toutes les trois.

Dans le premier cas, en éliminant les deux fonctions φ_1 et φ_2 par exemple, on aura deux équations différentielles du premier ordre

$$(g) \quad \begin{cases} \Psi_1[x, y, z, \psi(x, y, z), dx, dy, dz, d\psi(x, y, z)] = 0, \\ \Psi_2[x, y, z, \psi(x, y, z), dx, dy, dz, d\psi(x, y, z)] = 0. \end{cases}$$

Mais les relations (f) peuvent avoir lieu dans deux cas, si les fonctions

φ_1, φ_2, ψ se réduisent à des constantes, ou si l'une d'elles, ou deux ou trois sont des fonctions satisfaisant à ces relations. Si aucune de ces fonctions ne se réduit à une constante, comme il n'existe que deux relations (f), l'une des fonctions, ψ par exemple, sera une fonction arbitraire, et les deux autres, φ_1 et φ_2, seront exprimées par les relations (f) en fonction de ψ et de sa dérivée. Ainsi les deux équations différentielles du premier ordre équivalent à deux systèmes d'équations primitives, l'une où les deux équations primitives contiennent deux constantes arbitraires, et l'autre où elles contiennent une ou deux fonctions singulières φ_1 et φ_2 telles que celles-ci satisfassent aux conditions (f).

Dans le second cas, en éliminant les trois fonctions φ_1, φ_2, ψ entre les quatre équations, on aura l'équation différentielle du premier ordre

$$(h) \qquad \Theta(x, y, z, dx, dy, dz) = 0.$$

Cette équation équivaut encore à deux systèmes d'équations primitives entre les variables : dans l'un, les trois fonctions φ_1, φ_2, ψ se réduisent à trois constantes arbitraires; dans l'autre, les équations primitives contiennent une, deux ou trois fonctions singulières satisfaisant aux conditions (f); celles-ci pouvant contenir une fonction arbitraire ψ, les équations primitives contiennent alors cette fonction arbitraire et sa dérivée, puisque, en vertu de (f), les fonctions φ_1 et φ_2 s'expriment au moyen de ψ et de sa dérivée.

Généralement, pour le premier ordre d'indétermination des équations de ν variables et d'ordre μ des différentielles, il faudrait supposer l'existence de $\nu - 1$ équations primitives contenant deux systèmes des fonctions singulières des ν variables : $\mu(\nu - 1)$ fonctions φ ordinairement différentes dans les $\nu - 1$ équations, et $\nu - 2$ fonctions ψ qui se trouvent dans chacune des équations. On aurait ainsi le système d'équations primitives

$$(i) \quad \begin{cases} \Phi_1(x_1, x_2, \ldots x_\nu, \ \varphi_{11}, \ \varphi_{12}, \ \ldots \varphi_{1\mu}, \ \psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{\nu-2}) = 0, \\ \Phi_2(x_1, x_2, \ldots x_\nu, \ \varphi_{21}, \ \varphi_{22}, \ \ldots \varphi_{2\mu}, \ \psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{\nu-2}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_{\nu-1}(x_1, x_2, \ldots x_\nu, \ \varphi_{(\nu-1)1}, \varphi_{(\nu-1)2}, \ldots \varphi_{(\nu-1)\mu}, \ \psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{\nu-2}) = 0. \end{cases}$$

Ces $\mu(\nu - 1) + \nu - 2$ fonctions singulières peuvent se réduire toutes

à des constantes arbitraires; on aura, dans ce cas, un premier système d'équations primitives, les équations différentielles provenant de l'élimination de ces constantes entre les équations primitives et les équations que l'on en déduirait en les différentiant jusqu'à l'ordre μ. Si les fonctions singulières ne se réduisent pas toutes à des constantes, elles seront déterminées par des relations que l'on établirait facilement comme plus haut, ce qui permettrait de les éliminer entre les équations primitives et ces mêmes équations différentiées jusqu'à l'ordre μ, de manière à former le système des équations différentielles. Les équations (i) forment alors un second système d'équations primitives. On verrait dans ce cas, s'il y a moins de $\nu - 2$ constantes arbitraires, qu'on ne peut déterminer plus de $\mu(\nu - 1)$ fonctions singulières, à cause du nombre de relations de condition, qui est $\mu(\nu - 1)$, et les autres fonctions singulières sont arbitraires.

On verrait encore qu'en partant de l'un ou de l'autre système d'équations primitives, on pourrait éliminer $\mu(\nu - 1)$ constantes arbitraires ou fonctions singulières ou un plus grand nombre de ces constantes ou de ces fonctions, ce qui donnerait un système de $\nu - 1$ équations différentielles ou un nombre moindre.

Les équations aux différentielles partielles proviennent des ordres d'indétermination des équations supérieurs au premier. Nous ne pouvons donner ici des développements aussi étendus que le comporte la question de la formation des équations différentielles; on pourra consulter à ce sujet l'*Introduction à la Philosophie des Mathématiques*, d'où nous avons extrait en partie ce qui précède ([1]).

Enfin, il faut encore faire une remarque importante sur l'habitude que l'on a de traiter les questions d'intégration au moyen de considérations géométriques; cette méthode ne peut conduire à rien de général, par la raison que la Géométrie et l'Analyse, l'Algorithmie pour mieux dire, sont deux sciences indépendantes l'une de l'autre en principe. La première est une science qui n'admet que l'idée d'espace pour unique élément concret, et la seconde que l'idée de nombre. Ces sciences

---

([1]) Nous avons indiqué ce qui précède pour bien préciser ce que nous entendons par *solutions singulières* et *fonctions singulières;* la suite exigerait, pour être développée, des notations spéciales; nous aurons occasion d'y revenir plus tard.

n'ont de commun que la partie purement abstraite; il en résulte qu'une théorie géométrique traduite en analyse ne peut donner *nécessairement* une théorie complète d'Analyse : elle ne peut le faire que d'une manière *contingente*. C'est pour cette raison que la Géométrie symbolique à laquelle on a été conduit ne peut faire faire de véritables progrès à l'Analyse. La représentation géométrique des imaginaires est également inutile tout au moins, par la raison que la forme générale des quantités algébriques est

$$a_0 + \rho a_1 + \rho^2 a_2 + \ldots + \rho^{m-1} a_{m-1},$$

au lieu de $a + b\sqrt{-1}$, ρ étant une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité. Ces deux formes sont, il est vrai, équivalentes au fond, car, en supposant que l'on réduise toutes les quantités imaginaires de la première, on retombe évidemment sur la forme $a + b\sqrt{-1}$; mais cette réduction ne peut se faire arbitrairement sans faire disparaître certaines conditions du problème que l'on traite et dont il faut nécessairement tenir compte : une telle réduction peut rendre la solution très difficile, sinon impossible, puisqu'elle particularise la forme des quantités. On verra plus tard quelle est l'importance de cette remarque.

Ainsi les méthodes géométriques ne peuvent être généralement admises comme auxiliaires des méthodes algorithmiques; c'est ce que Wronski a compris le premier; en suivant ses indications, nous parviendrons à l'intégration complète des équations, sans avoir besoin de nous appuyer sur aucune considération géométrique.

Nous n'avons pas à insister davantage sur les observations qui précèdent : il suffit de les signaler pour l'instant; nous aurons occasion d'y revenir avec plus de détails dans ce qui va suivre. Nous allons maintenant entreprendre l'intégration des équations en examinant d'abord les équations différentielles ne contenant qu'une variable indépendantes, puis les équations aux différences finies dans lesquelles l'inconnue ne dépend aussi que d'une seule variable. Nous examinerons ensuite comment on peut intégrer les équations contenant des différences ou des différentielles d'une fonction de plusieurs variables indépendantes, et enfin les équations simultanées primitives ou non.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NE CONTENANT QU'UNE SEULE VARIABLE INDÉPENDANTE.

Nous rappelons que, pour résoudre une équation généralement quelconque, il s'agit de trouver une fonction qui, mise à la place de l'inconnue, satisfasse identiquement à l'équation proposée. L'expression (2) est, comme on l'a vu, une expression générale de la quantité inconnue y qui satisfait à l'équation donnée

$$(12) \qquad \varphi(y) = 0.$$

Maintenant y est considéré comme fonction d'une variable indépendante x, et la fonction φ contient, outre l'inconnue y et la variable x, les différentielles de ces deux quantités. La question se ramène donc, pour intégrer l'équation (12), à introduire dans l'expression (2) la variable x et à calculer les dérivées des divers ordres de l'inconnue y qui y entrent. Pour ce dernier objet, on est conduit à considérer généralement une fonction de l'inconnue $F(y)$, F étant une fonction donnée; on sait d'ailleurs que dans certains cas la véritable inconnue d'un problème n'est pas précisément la quantité y qui entre dans l'équation du problème, mais une fonction de cette quantité, telle que $\sin y$ par exemple; nous en avons déjà trouvé un exemple dans la résolution de l'équation transcendante que nous avons traitée plus haut. Pour cette raison, nous substituerons à l'expression (2) l'expression plus générale (3), savoir

$$F(y) = F(w) - \varphi(w)\frac{dF(w)}{d\varphi(w)} + [\varphi(w)]^2 \frac{d\varphi(w)\,d^2F(w) - d^2\varphi(w)\,dF(w)}{2[\varphi(w)]^3} - \ldots$$

Nous nous proposons donc de trouver une fonction déterminée F de la quantité y donnée par l'équation différentielle (12).

Formation de l'équation réduite. — D'après ce que nous avons déjà dit, la quantité fondamentale w qui entre dans l'expression (3) est ici une fonction de x; la fonction $F(w)$, également fonction de x, devra

être aussi rapprochée que possible de la fonction cherchée $F(y)$, et elle sera déterminée par une équation déjà désignée sous le nom d'*équation réduite*. Cette équation devra ainsi différer le moins possible de l'équation proposée (12); de cette manière, la fonction $\varphi(w)$ étant constamment réduite à sa valeur minima, l'expression fondamentale possédera le maximum de convergence.

La marche à suivre est donc ici la même que celle que nous avons indiquée dans le cas des équations primitives, en introduisant toutefois les modifications dues à la nature des équations différentielles, comme nous allons le voir.

Nous formerons l'équation réduite en introduisant dans l'équation proposée une quantité arbitraire ω, soit en coefficient, soit en exposant, de telle sorte que l'équation transformée

$$\varphi(y, \omega) = 0, \tag{13}$$

pour $\omega = 1$, reproduise l'équation proposée, qui est, d'après cette notation,

$$\varphi(y, 1) = 0, \tag{13'}$$

et pour $\omega = 0$ donne l'équation réduite

$$\varphi(y, 0) = 0, \tag{13''}$$

Cette équation devra être résoluble par des procédés ordinaires et devra ainsi différer aussi peu qu'il se pourra de l'équation (13)'; elle sera une équation différentielle de même ordre que la proposée, afin d'admettre le même genre de solution.

Or cette réduction est toujours possible; on conçoit même qu'elle puisse être faite de plusieurs manières, ce qui laisse un certain arbitraire dans cette réduction. On peut ainsi, au moyen de l'équation réduite, introduire dans la solution même de l'équation proposée diverses espèces de fonctions, généralement des transcendantes d'ordres plus ou moins élevés. Ces fonctions fondamentales, dont les propriétés devront être nécessairement bien connues, conduiront dans certains cas à des solutions finies, ainsi que nous l'avons dit plus haut. Remar-

quons aussi que chacune de ces fonctions nécessitera préalablement une étude particulière, et leur usage exigera l'emploi de tables spéciales pour chacune d'elles; il est donc important de chercher à réduire ces fonctions au nombre strictement nécessaire, ce qui est d'ailleurs indispensable dans les applications.

Pour cela, comme on va le voir, l'équation réduite peut être ramenée dans tous les cas à être une équation différentielle linéaire à coefficients constants, toujours intégrable théoriquement et d'une manière finie, et cette solution permet de n'introduire que des transcendantes de la forme e^{rx}, où r est une constante, c'est-à-dire des exponentielles ou des sinus d'un ordre quelconque suivant que r sera réel ou imaginaire. Elles sont, en y joignant les logarithmes fonctions inverses des exponentielles, les seules transcendantes nécessaires; ces fonctions sont élémentaires et bien connues ([1]).

Ainsi, d'après cette théorie, contrairement aux opinions admises, les autres transcendantes, quelles qu'elles soient, ne peuvent se rencontrer que dans des problèmes particuliers, et rien ne conduit à les introduire nécessairement dans les calculs; au contraire, elles sont facilement exprimables au moyen des transcendantes élémentaires que nous venons de citer; nous aurons occasion de nous en rendre compte en exposant une autre méthode.

En formant une équation réduite à coefficients constants, nous obtenons dans tous les cas une réduction uniforme, ne comportant rien d'arbitraire, ce qui est un caractère des solutions théoriques, telles que Wronski les a définies. La quantité $F(\varpi)$ formera donc encore ici la partie essentiellement théorique et finie de la solution, et la série des autres termes de l'expression (3) formera la partie technique et indéfinie, partie qui existera généralement. La solution sera considérée comme théorique, quand cette seconde partie sera aussi réduite que possible, et l'expression donnant la solution cherchée atteindra le maximum de convergence.

La formation de l'équation réduite, telle que nous l'indiquons, con-

---

([1]) Les sinus d'ordres supérieurs sont cependant des fonctions encore peu connues; nous en donnerons les propriétés toutes les fois que l'occasion s'en présentera.

duit à l'intégrale générale de l'équation proposée par suite de l'introduction unique de constantes arbitraires ; quant aux solutions singulières, on pourrait les obtenir soit en les déduisant de l'intégrale générale, soit en modifiant convenablement la formation de l'équation réduite.

Calcul de l'inconnue. — Pour opérer comme nous venons de le dire, nous mettrons l'équation différentielle proposée, supposée d'ordre μ, sous la forme suivante, ce que l'on peut toujours faire,

$$(14) \qquad \frac{d^\mu y}{dx^\mu} H_\mu + \frac{d^{\mu-1} y}{dx^{\mu-1}} H_{\mu-1} + \ldots + y H_0 = \psi(x);$$

$\psi(x)$ est une fonction quelconque de la seule variable x et les coefficients $H_0, H_1, \ldots, H_\mu$ peuvent être des fonctions quelconques de x, de la fonction inconnue y et de ses dérivées des divers ordres, pourvu qu'ils ne dépassent pas l'ordre μ, qui est l'ordre le plus élevé.

Pour plus de simplicité, nous pourrons écrire cette équation ainsi :

$$(14)' \qquad \sum_\mu \frac{d^\sigma y}{dx^\sigma} H_\sigma = \psi(x),$$

en convenant de faire varier l'indice σ de 0 à μ pour obtenir tous les termes compris sous le signe Σ.

Considérons les variations de l'inconnue, correspondantes à des valeurs de la variable indépendante, comprises entre deux limites quelconques, mais déterminées, p et q. Soient y_p et y_q les deux valeurs de y correspondantes ; la fonction F variera entre les limites $F(y_p)$ et $F(y_q)$; si nous désignons par β une valeur de y telle que la quantité $F(\beta)$ soit sensiblement la moyenne entre les quantités $F(y_p)$ et $F(y_q)$, α étant la valeur de x correspondante, les valeurs α et β de x et de y sont ce que Wronski appelle *valeurs moyennes;* nous les supposerons provisoirement connues.

Appelons h_σ ce que devient le coefficient général H_σ, quand on y remplace les quantités x, y et leurs dérivées par leurs valeurs moyennes ; nous pourrons introduire la quantité arbitraire ω comme il suit, et

prendre pour l'équation transformée (13) l'équation

$$(15) \qquad \sum_{\mu} \frac{d^{\sigma}y}{dx^{\sigma}} h_{\sigma} \left(\frac{H_{\sigma}}{h_{\sigma}}\right)^{\omega} - \psi(x) = 0.$$

Car, pour $\omega = 1$, nous obtenons l'équation proposée $(14)'$, et pour $\omega = 0$ l'équation réduite à coefficients constants

$$(16) \qquad \sum_{\mu} \frac{d^{\sigma}y}{dx^{\sigma}} h_{\sigma} - \psi(x) = 0.$$

Tel est le moyen de former généralement l'équation réduite.

Quant à la solution de cette dernière, l'inconnue y étant ici la valeur fondamentale que nous avons dénotée par ϖ, en désignant par $m_1, m_2, \ldots, m_{\mu}$ les μ racines de l'équation caractéristique

$$(17) \qquad h_{\mu} m^{\mu} + h_{\mu-1} m^{\mu-1} + \ldots + h_0 = 0,$$

nous aurons

$$(17)' \qquad \varpi = \Sigma_{\mu}\, e^{m\,x} \left[M_{\sigma} + N_{\sigma} \int \psi(x)\, e^{-m_{\sigma}x}\, dx\right],$$

M_{σ} est une des μ constantes arbitraires de l'intégration, et N_{σ} une constante dont la valeur est

$$N_{\sigma} = \frac{1}{h_{\mu}(m_{\sigma} - m_1)(m_{\sigma} - m_2)\ldots(m_{\sigma} - m_{\mu})},$$

l'indice σ variant de 1 à μ.

Il peut être nécessaire, dans certains cas, d'introduire une fonction arbitraire dans l'équation réduite, afin de lever certaines difficultés qui se présentent parfois. Pour cela on peut ajouter cette fonction arbitraire $\chi(x)$ au second membre de l'équation transformée, pour ne pas modifier la forme de la valeur fondamentale ϖ; cette équation sera donc généralement

$$(18) \qquad \sum_{\mu} \frac{d^{\sigma}y}{dx^{\sigma}} h_{\sigma} \left(\frac{H_{\sigma}}{h_{\sigma}}\right)^{\omega} - \psi(x) - (1-\omega)\chi(x) = 0,$$

équation qui reproduit l'équation proposée pour $\omega = 1$, et fournit l'équation réduite

$$(19) \qquad \sum_\mu \frac{d^\sigma y}{dx^\sigma} h_\sigma - \psi(x) - \chi(x) = 0,$$

pour $\omega = 0$. Si la fonction $\psi(x)$ est nulle, il convient de prendre pour la fonction arbitraire $\chi(x)$ l'exponentielle se^{rx}, s et r étant des constantes qu'il faut déterminer convenablement; de cette façon l'expression de la valeur fondamentale w conserve la forme qu'elle aurait dans le cas où la fonction arbitraire n'existerait pas.

Ajoutons que, si l'équation caractéristique (17) a des racines imaginaires, les exponentielles de l'expression (17) devront être remplacées par des fonctions de sinus d'un ordre plus ou moins élevé, comme l'a montré le premier M. Yvon Villarceau dans le Mémoire déjà cité; nous en verrons des exemples.

Nous avons vu que les différentielles qui entrent dans l'expression fondamentale (3) sont prises seulement par rapport à la quantité w, celle-ci étant une fonction de x qui est maintenant déterminée d'une manière générale. Pour les calculs nous remplacerons les différentielles des fonctions φ et F par leurs dérivées par rapport à w; nous aurons donc, à la place de l'expression (3), l'expression

$$(19)_1 \quad \left\{ \begin{aligned} F(y) = F(w) - \varphi(w) \frac{1}{\frac{d\varphi(w)}{dw}} \frac{dF(w)}{dw} \\ + \frac{1}{2}[\varphi(w)]^2 \frac{\frac{d\varphi(w)}{dw}\frac{d^2F(w)}{dw^2} - \frac{d^2\varphi(w)}{dw^2}\frac{dF(w)}{dw}}{\left[\frac{d\varphi(w)}{dw}\right]^3} - \ldots \end{aligned} \right.$$

En prenant les dérivées par rapport à w de certaines fonctions de x, que nous désignerons généralement par $f(x)$, nous aurons

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{df(x)}{dw} &= \frac{df(x)}{dx}\frac{dx}{dw}, \\ \frac{d^2f(x)}{dw^2} &= \frac{d^2f(x)}{dx^2}\left(\frac{dx}{dw}\right)^2 + \frac{df(x)}{dx}\frac{d^2x}{dw^2}, \\ \frac{d^3f(x)}{dw^3} &= \frac{d^3f(x)}{dx^3}\left(\frac{dx}{dw}\right)^3 + 3\frac{d^2f(x)}{dx^2}\frac{d^2x}{dw^2}\frac{dx}{dw} + \frac{df(x)}{dx}\frac{d^3x}{dw^3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Nous avons de plus à calculer les dérivées de x par rapport à w, ce qui donnera

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dw} &= \frac{1}{\dfrac{dw}{dx}},\\ \frac{d^2x}{dw^2} &= -\frac{d^2w}{dx^2}\,\frac{1}{\left(\dfrac{dw}{dx}\right)^3},\\ \frac{d^3x}{dw^3} &= \left[3\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 - \frac{dw}{dx}\,\frac{d^3w}{dx^3}\right]\frac{1}{\left(\dfrac{dw}{dx}\right)^5},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Wronski a donné l'expression générale de ces dérivées pour les différents ordres; les valeurs précédentes suffisent pour l'instant.

Nous pouvons maintenant porter les valeurs des dérivées de $F(w)$ et $\varphi(w)$ dans l'expression précédente $(19)_1$; pour cela, remarquons que ces fonctions ne dépendent que de la variable x, puisque w est une fonction de x; il en résulte que, en appliquant les expressions (20) et (21), où $f(x)$ peut représenter l'une des deux fonctions F ou φ, nous avons

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} F(y) = F(w) &- \varphi(w)\frac{1}{\left(\dfrac{d\varphi(w)}{dx}\right)}\left(\frac{d(Fw)}{dx}\right)\\ &+ \frac{1}{2}\Big[\varphi(w)\Big]^2\frac{1}{\left(\dfrac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3}\left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)\left(\frac{d^2F(w)}{dx^2}\right)\right.\\ &\qquad\left. - \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right)\left(\frac{dF(w)}{dx}\right)\right] - \ldots \end{aligned}\right.$$

De plus, on a encore besoin des dérivées, par rapport à x, prises sur la seule variable y de la fonction $F(y)$; soit $\left(\dfrac{d^\nu F(y)}{dx^\nu}\right)$ la dérivée d'ordre ν, la fonction $F(y)$ étant quelconque; on peut admettre qu'elle représente la dérivée en question; par suite, l'expression (22) donne

$$(22)'\quad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{d^\nu F(y)}{dx^\nu}\right) = \left(\frac{d^\nu F(w)}{dx^\nu}\right) &- \varphi(w)\frac{1}{\left(\dfrac{d\varphi(w)}{dx}\right)}\left(\frac{d^{\nu+1}F(w)}{dx^{\nu+1}}\right)\\ &+ \frac{1}{2}\Big[\varphi(w)\Big]^2\frac{1}{\left(\dfrac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3}\left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)\left(\frac{d^{\nu+2}F(w)}{dx^{\nu+2}}\right)\right.\\ &\qquad\left. - \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right)\left(\frac{d^{\nu+1}F(w)}{dx^{\nu+1}}\right)\right] - \ldots \end{aligned}\right.$$

En particulier, si $F(y)$ se réduit à y, il vient

$$(22)'' \quad \left\{ \begin{aligned} & y = w - \varphi(w)\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)}\frac{dw}{dx} \\ & \qquad + \frac{1}{2}[\varphi(w)]^2 \frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3}\left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)\frac{d^2 w}{dx^2} - \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right)\frac{dw}{dx}\right] - \dots \\ & \text{et} \\ & \frac{d^\nu y}{dx^\nu} = \frac{d^\nu w}{dx^\nu} - \varphi(w)\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)}\frac{d^{\nu+1} w}{dx^{\nu+1}} \\ & \qquad + \frac{1}{2}[\varphi(w)]^2 \frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3}\left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)\frac{d^{\nu+2} w}{dx^{\nu+2}} - \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right)\frac{d^{\nu+1} w}{dx^{\nu+1}}\right] - \dots. \end{aligned} \right.$$

Enfin, il faut encore calculer les dérivées de $F(w)$, de $\varphi(w)$ et de w par rapport à x. La forme de la fonction F n'étant pas explicitement donnée ici, bien qu'elle soit connue dans chaque cas particulier, on ne peut effectuer pour l'instant le calcul de ses dérivées; il suffirait évidemment de substituer à la quantité w sa valeur donnée par (17)', et à ses dérivées, si elles existent, les valeurs que l'on obtiendrait en prenant les dérivées successives du deuxième membre de l'expression (17)'. Cependant, w n'étant qu'une première valeur approchée de l'inconnue y, on pourra faire usage de la relation différentielle proposée (14) pour obtenir, avec la plus grande exactitude possible, les dérivées cherchées à partir de la $\mu^{\text{ième}}$.

Pour ce qui concerne la fonction φ, nous avons, d'après (14)',

$$(23) \qquad \varphi(w) = \sum_{\mu} \frac{d^\sigma w}{dx^\sigma} H'_\sigma - \psi(x),$$

en désignant ici par H'_σ la valeur que prend le coefficient H_σ quand on y remplace y par w; on peut éliminer la plus haute dérivée de w au moyen de l'équation réduite.

On obtient ensuite, en ne prenant la dérivée de $\varphi(y)$ que sur la variable y,

$$\left(\frac{d\varphi(y)}{dx}\right) = \sum_{\mu} \frac{d^{\sigma+1} y}{dx^{\sigma+1}} H_\sigma + \sum_{\mu} \frac{d^\sigma y}{dx^\sigma}\left(\frac{dH_\sigma}{dx}\right);$$

mais, en prenant aussi la dérivée totale sur la même fonction $\varphi(y)$,

on a

$$\sum_\mu \frac{dy^{\sigma+1}}{dx^{\sigma+1}} \mathrm{H}_\sigma + \sum_\mu \frac{dy^\sigma}{dx^\sigma}\frac{d\mathrm{H}}{dx} - \frac{d\psi(x)}{dx} = 0,$$

par suite, en retranchant le premier membre de cette égalité du second membre de la précédente et changeant y en w, on obtient

$$(23)' \qquad \left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right) = \sum_\mu \frac{d^\sigma y}{dx^\sigma}\left[\left(\frac{d\mathrm{H}'_\sigma}{dx}\right) - \frac{d\mathrm{H}'_\sigma}{dx}\right] + \frac{d\psi(x)}{dx}.$$

En opérant de même, on a encore

$$(23)'' \qquad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right) &= \sum_\mu 2\,\frac{d^{\sigma+1}w}{dx^{\sigma+1}}\left[\left(\frac{d\mathrm{H}'_\sigma}{dx}\right) - \frac{d\mathrm{H}_\sigma}{dx}\right] \\ &\quad + \sum_\mu \frac{d^\sigma w}{dx^\sigma}\left[\left(\frac{d^2\mathrm{H}'_\sigma}{dx^2}\right) - \frac{d^2\mathrm{H}'_\sigma}{dx^2}\right] + \frac{d^2\psi(x)}{dx^2};\end{aligned}\right.$$

et ainsi de suite. D'après ce que nous venons de dire, les dérivées $\left(\frac{d\mathrm{H}'_\sigma}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2\mathrm{H}'_\sigma}{dx^2}\right)$, $\cdots$ ne subsistent qu'autant que le coefficient H'_σ contient la quantité w, puisque les dérivations ne sont effectuées ici que sur des fonctions de w (¹). Dans les sommes Σ, σ varie de zéro à μ.

Enfin, pour ce qui est de la valeur fondamentale w, l'équation réduite donne, d'après (17)',

$$(24) \qquad \left\{\begin{aligned} w &= \sum_\mu e^{m_\sigma x}\left[\mathrm{M}_\sigma + \mathrm{N}_\sigma \int \psi(x) e^{-m_\sigma x}\,dx\right], \\ \frac{dw}{dx} &= \sum_\mu m_\sigma e^{m_\sigma x}\left[\mathrm{M}_\sigma + \mathrm{N}_\sigma \int \psi(x) e^{-m_\sigma x}\,dx\right] + \sum_\mu \mathrm{N}_\sigma \psi(x), \\ \frac{d^2w}{dx^2} &= \sum_\mu m_\sigma^2 e^{m_\sigma x}\left[\mathrm{M}_\sigma + \mathrm{N}_\sigma \int \psi(x) e^{-m_\sigma x}\,dx\right] \\ &\quad + \sum_\mu m_\sigma \mathrm{N}_\sigma \psi(x) + \sum_\mu \mathrm{N}_\sigma \frac{d\psi(x)}{dx}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

Ici l'indice σ varie de 1 à μ.

(¹) Si les coefficients H' ne sont que des fonctions de w et si $\psi(x)$ est nul, les expressions (23)', (23)'' sont nulles identiquement, et les expressions (22), (22)', (22)'' ont leurs termes infinis, sauf le premier; dans ce cas il faut recourir, pour le calcul de l'inconnue, aux formules de la *génératrice neutre,* lesquelles sont les réduites de certaines fractions continues toujours convergentes.

Si la fonction $\psi(x)$ est se^{rx}, en faisant $r = m_0$, s et r étant des constantes, et posant

$$(25)\quad \left\{ \begin{aligned} M_0 &= \frac{s}{h_\mu(m_0 - m_1)(m_0 - m_2)(m_0 - m_2)\ldots(m_0 - m_\mu)} \\ &= \frac{s}{h_\mu m_0^\mu + h_{\mu-1} m_0^{\mu-1} + \ldots + h_0}, \end{aligned} \right.$$

on a

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} &w = \sum\nolimits_\mu e^{m_\sigma x} M_\sigma, \\ &\text{et} \\ &\frac{d^\nu w}{dx^\nu} = \sum\nolimits_\mu m_\sigma^\nu e^{m_\sigma x} M_\sigma. \end{aligned} \right.$$

Il est facile de vérifier que cette expression de w et celles de ses dérivées rendent identique l'équation réduite

Dans ces dernières sommes, l'indice σ varie de zéro à μ. De même qu'il a été dit plus haut, on peut, à partir de la μ^{ieme} dérivée, faire usage de la relation différentielle proposée pour calculer les dérivées des ordres supérieurs, de préférence aux relations précédentes (24) ou (26), afin d'obtenir un plus haut degré d'approximation.

On doit remarquer que la valeur moyenne de la fonction cherchée $F(y)$ est donnée exactement par l'équation réduite (19); il en résulte que, pour la valeur moyenne de y, l'expression (22) se réduit à son premier terme, et tous les autres sont nuls. Pour les valeurs voisines de la valeur moyenne de l'inconnue, l'expression (22) est très convergente, et cette convergence diminue généralement à mesure que la valeur de y s'éloigne de cette valeur particulière. La valeur moyenne doit donc être choisie de telle sorte qu'elle corresponde, autant que possible, à la moyenne des variations de la fonction cherchée; la convergence de l'expression (22) se trouve ainsi à peu près la même pour les valeurs extrêmes considérées p et q de x. Quant au nombre de termes que l'on doit prendre pour obtenir la quantité cherchée, il dépend à la fois de l'approximation que l'on veut obtenir et de la variation des valeurs de y par rapport à sa valeur moyenne. Si, pour certaines valeurs assez éloignées de cette dernière, l'expression (22) n'était plus suffisamment convergente, ou même était divergente, il faudrait avoir recours aux formules (10) et (11) de la *génération neutre*

(*voir* la Note de janvier 1881), ou à la méthode d'exhaustion, ou encore à ces deux moyens à la fois.

Ici l'application de la méthode d'exhaustion se présente plutôt comme un simple procédé que comme une véritable méthode; nous conservons cependant le nom de *méthode d'exhaustion*, à cause de son origine.

Pour indiquer que l'on fait usage de la méthode d'exhaustion, nous écrirons l'expression (22) de la manière suivante :

$$(27) \qquad F(y) = F(\varpi) - \varphi(\varpi, \omega) \frac{1}{\left(\frac{d\varphi(\varpi, \omega)}{dx}\right)} \left(\frac{dF(\varpi)}{dx}\right) + \cdots,$$

et l'on donnera à ω une valeur convenable comprise entre zéro et l'unité.

Si $\omega < 1$, $F(y)$ n'est plus alors la quantité cherchée, mais cette fonction doit être considérée comme étant une nouvelle valeur fondamentale $F(\varpi_1)$. On calculera donc les dérivées $\frac{dF(\varpi_1)}{dx}, \frac{d^2F(\varpi_1)}{dx^2}, \ldots$, et, en donnant à ω, que nous désignerons spécialement ici par ω_1, une valeur plus grande que la première fois, on reportera la fonction $F(\varpi_1)$ et ses dérivées dans l'expression (27), et l'on obtiendra une nouvelle valeur $F(\varpi_2)$ sur laquelle on opérera comme on vient de le faire sur $F(\varpi_1)$, à moins que l'on ait pu faire $\omega_1 = 1$, car dans ce cas $F(\varpi_1)$ n'est autre que $F(y)$.

Détermination des constantes. — Nous venons de donner toutes les expressions nécessaires pour obtenir la valeur de la fonction cherchée avec autant d'approximation qu'on peut le désirer; il ne nous reste plus qu'à déterminer les constantes d'intégration et les valeurs dites *moyennes*.

Admettons que ces valeurs moyennes diffèrent des valeurs initiales, qui fixent les constantes d'intégration; la valeur initiale a de x correspondant aux valeurs respectives de y et de ses $\mu - 1$ premières dérivées $b, b', b'', \ldots, b^{(\mu-1)}$, fait connaître la quantité $F(b), \frac{dF(b)}{da}, \ldots$; les expressions précédentes (22) et (22)' nous donnent alors, au moyen de la valeur fondamentale ϖ qui contient les μ constantes $M_1, M_2, \ldots, M_\mu$,

μ relations qui serviront à déterminer ces constantes. Ces relations sont μ équations transcendantes, primitives, simultanées, en prenant dans les expressions (22) et (22)′ autant de termes qu'il en faut pour avoir une approximation suffisante. Ce système peut être résolu comme nous l'indiquerons plus loin.

Connaissant donc les valeurs des constantes, qui sont fonctions des valeurs moyennes, si nous faisons, pour la valeur moyenne α de x, $\gamma = \beta$ et $\frac{d^\sigma(\beta)}{dx^\sigma} = \beta^{(\sigma)}$, nous aurons à déterminer les quantités β, β', $\beta'', \ldots, \beta^{(\mu)}$, au moyen des expressions (22)″. Mais ici ces expressions se réduisent à la valeur fondamentale donnée par l'équation réduite et à ses dérivées, et ces quantités contiennent explicitement les valeurs des constantes, lesquelles seront remplacées par leurs expressions en $\alpha, \beta, \beta', \ldots$, que nous supposons maintenant connues; nous avons donc encore à résoudre un système de μ équations primitives comme précédemment. Il est à remarquer que la dérivée $\beta^{(\mu)}$ est généralement donnée par l'équation proposée même.

Ces résolutions successives sont possibles, bien qu'elles entraînent à des calculs très compliqués, mais on peut toujours les éviter. Pour cela, on peut prendre, dans la plupart des cas, les valeurs initiales pour valeurs moyennes : alors, le premier système d'équations simultanées se réduisant aux expressions provenant de l'équation réduite, les μ constantes sont données par la résolution de simples équations linéaires.

Dans le cas où, pour la suite des calculs, il conviendrait de prendre les valeurs moyennes différentes des valeurs initiales, on peut, pour commencer, confondre ces deux systèmes de valeurs ainsi que nous venons de le faire, et ensuite calculer comme une valeur quelconque les valeurs particulières de γ et de ses dérivées qui sont les véritables valeurs moyennes, puis considérer ces nouvelles quantités à la fois comme nouvelles valeurs initiales et comme valeurs moyennes, de telle sorte que les nouvelles constantes seront encore déterminées par un système d'équations linéaires simultanées. Ainsi, il est toujours possible de déterminer les constantes d'intégration et les valeurs moyennes par la résolution de simples équations du premier degré, et par le calcul ordinaire de quantités inconnues au moyen de la méthode secondaire.

Il faut encore remarquer que, puisqu'il n'y a que le changement des valeurs moyennes qui distingue les deux systèmes d'équations linéaires dont nous venons de parler, il n'y a qu'à substituer les secondes valeurs moyennes dans le premier système d'équations du premier degré pour obtenir le second, de sorte qu'en réalité on n'a qu'un seul système d'équations linéaires à résoudre.

Telle est, dans ses principaux détails, l'exposition de la Méthode secondaire élémentaire, appliquée aux équations différentielles dont l'inconnue ne dépend que d'une seule variable. Quelques exemples éclairciront complètement ce qui précède.

Deuxième exemple. — Soit à déterminer deux fonctions y et z données par les relations

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{aligned} dy &= -pyz\,dx + m\,dx, \\ dz &= -qyz\,dx + n\,dx, \end{aligned} \right.$$

où les quantités m, n, p, q sont des constantes.

En éliminant le produit yz on obtient

$$p\,dz - q\,dy = (pn - qm)\,dx.$$

Si pour $x = a$ on a $y = b$, $z = c$, l'intégration de cette équation donne

$$(\beta) \qquad p(z - c) - q(y - b) = (pn - qm)(x - a).$$

Cette relation permet d'éliminer y ou z de l'une des équations proposées (α) et l'on a

$$(\gamma) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= [(qm - pn\,(x - a) - q(y - b) - cp]\,y + m, \\ \frac{dz}{dx} &= [(pn - qm)(x - a) - p(z - c) - bq]\,z + n. \end{aligned} \right.$$

Il suffit d'intégrer la première équation, et l'équation (β) donnera la valeur de la seconde inconnue en fonction de la première.

Formation de l'équation réduite. — Formons l'équation réduite de la

première équation (γ); on voit facilement que cette équation peut être résolue par les procédés ordinaires dans plusieurs cas particuliers.

Si les quantités m, q, $(qm - pn)$ ou pn sont nulles ensemble ou séparément, il est possible d'intégrer l'équation proposée et de former, dans chacune de ces circonstances, autant d'équations réduites; examinons ces différents cas :

1° Supposons que le terme en m soit nul dans l'équation réduite, nous pourrons obtenir l'équation transformée de la manière suivante :

$$(\delta) \qquad \frac{dy}{dx} = [(qm - pn)(x - a) - q(y - b) - cp]\,y + m\omega.$$

Pour $\omega = 0$, l'équation donne la valeur fondamentale

$$(\delta)' \qquad w = b\frac{e^{P}}{bq\int_a^x e^{P}dx + 1},$$

en faisant

$$(\delta)'' \qquad P = \tfrac{1}{2}(qm - pn)(x - a)^2 + (bq - cp)(x - a).$$

On peut parvenir à cette intégration, qui est des plus simples, en posant $y = uv$, et l'on détermine les deux fonctions de x, u et v, de telle sorte que l'intégration soit possible. Il en serait de même pour les intégrations suivantes.

2° Transformons l'équation de manière que l'équation réduite ne contienne pas de terme en y^2; en désignant par α et β les valeurs moyennes respectives de x et de y, on peut écrire l'équation transformée

$$(\varepsilon) \qquad \frac{dy}{dx} = \left\{(qm - pn)(x - a) - q\left[\beta\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\omega} - b\right] - cp\right\}y + m;$$

pour $\omega = 0$, on a

$$(\varepsilon)' \qquad w = e^{P}\left(b + m\int_a^x e^{-P}dx\right),$$

en faisant

$$(\varepsilon)'' \qquad P = \tfrac{1}{2}(qm - pn)(x - a)^2 + [(b - \beta)q - cp](x - a).$$

3° Faisons en sorte que la variable x n'existe pas dans l'équation réduite; en remplaçant x par sa valeur moyenne α, on a pour équation transformée

$$(\zeta) \qquad \frac{dy}{dx} = \left\{(qm - pn)\left[\alpha\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\omega} - a\right] - q(y - b) - cp\right\}y + m;$$

pour $\omega = 0$, on a

$$(\zeta)' \qquad w = \frac{Q + R}{2q} + \frac{R e^{Rx}}{CR e^{Rx} - q},$$

en faisant

$$(\zeta)'' \qquad \begin{cases} Q = bq - cp + (\alpha - a)(qm - pn), \\ R = \pm\sqrt{Q^2 + 4qm}, \\ C = \dfrac{q}{R e^{Ra}} \dfrac{2bq - Q - R + 2R e^{Ra}}{2bq - Q - R}. \end{cases}$$

Cette constante est déterminée par les mêmes conditions que plus haut.

4° Si nous voulons ramener l'équation au cas où l'on a $pn = 0$, écrivons l'équation transformée de la manière suivante

$$(\eta) \qquad \frac{dy}{dx} = [(qm - pn\omega)(x - a) - q(y - b) - cp]y + m;$$

pour $\omega = 0$, on obtient

$$(\eta)' \quad w = m(x - a) + \frac{1}{q}(bq - cp) + \frac{cp}{q} \frac{(cp - bq)e^{-P}}{cp\left(1 + \int_a^x e^{-P} dx\right) - bq},$$

en faisant

$$(\eta)'' \qquad P = \tfrac{1}{2}qm(x - a)^2 + (bq - cp)(x - a).$$

On voit, par ces diverses manières de former l'équation réduite, que les valeurs fondamentales conduiraient à une expression de l'inconnue y très convergente, dans les cas où les coefficients de l'équation proposée se rapprocheraient suffisamment des suppositions que nous avons faites, parce qu'alors l'équation réduite différerait très peu de l'équation proposée. Cependant les solutions que nous venons

d'examiner sont compliquées, et toutes, sauf l'une d'elles, exigent que l'on effectue des quadratures pour obtenir la valeur fondamentale ; ces quadratures, que l'on pourrait effectuer par un moyen quelconque, ou par la méthode secondaire même, conduiraient à un calcul assez long.

Il est donc avantageux de ne pas faire usage de ces solutions et de former l'équation réduite avec des coefficients constants ([1]).

Posons donc

$$(\theta) \qquad \begin{cases} \mathrm{H} = (qm - pn)(x - a) - q(y - b) - cp, \\ h = (qm - pn)(\alpha - a) - q(\beta - b) - cp, \end{cases}$$

en désignant toujours par α et β les valeurs moyennes; nous aurons pour équation transformée

$$(\theta)' \qquad \frac{dy}{dx} = h\left(\frac{\mathrm{H}}{h}\right)^{\omega} y + m,$$

ou

$$(\theta)'' \qquad \frac{dy}{dx} = \{h + [(qm - pn)(x - \alpha) - q(y - \beta)]\,\omega\}\,y + m,$$

et pour $\omega = 0$ nous aurons l'équation réduite

$$(\iota) \qquad \frac{dy}{dx} = hy + m;$$

par suite, la valeur fondamentale est

$$(\varkappa) \qquad w = \mathrm{C}\,e^{hx} - \frac{m}{h},$$

C étant la constante d'intégration.

Calcul de l'inconnue. — Or, si nous supposons que les valeurs

---

([1]) Nous ne considérons ici que la forme des équations réduites; mais il y a une considération plus importante basée sur la nature de la solution, c'est-à-dire qu'il faut savoir d'abord si l'on obtient ainsi une intégrale générale ou une intégrale singulière, et ensuite quelle est l'intégrale qui convient. Nous examinerons ceci plus loin, lors du calcul numérique.

moyennes α et β se confondent avec les valeurs initiales a et b, on a

$$h = -cp,$$

et la constante est déterminée par la relation

$$b = \frac{m}{cp} + \mathrm{C}\, e^{-acp},$$

qui donne

$$(\varkappa)' \qquad \mathrm{C} = \left(b - \frac{m}{cp}\right) e^{acp};$$

par suite, l'expression de w est

$$(\lambda) \qquad w = \left(b - \frac{m}{cp}\right) e^{cp(a-x)} + \frac{m}{cp}.$$

Maintenant, pour appliquer l'expression (22), dans laquelle $\mathrm{F}(y)$ devient y, c'est-à-dire

$$(\mu) \quad \left\{ \begin{aligned} y = w &- \frac{\varphi(w)}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)} \frac{dw}{dx} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{[\varphi(w)]^2}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3} \left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)\frac{d^2 w}{dx^2} - \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right)\frac{dw}{dx}\right] - \ldots, \end{aligned} \right.$$

il reste à calculer les dérivées de w, ainsi que celles de $\varphi(w)$.

Nous avons pour les dérivées de w prises sur l'expression ($\varkappa$)

$$(\nu) \qquad \frac{d^\sigma w}{dx^\sigma} = \mathrm{C} h^\sigma e^{hx}.$$

Ensuite la fonction $\varphi(w)$ étant

$$\varphi(w) = \frac{dw}{dx} - [(qm - pn)(x - a) - q(w - b) - cp]\, w - m,$$

on obtient, en remplaçant la dérivée de w par sa valeur,

$$(\xi) \qquad \varphi(w) = -[(qm - pn)(x - a) - q(w - b)]\, w;$$

puis les expressions (23)′ et (23)″ donnent ici

$$(\xi)' \qquad \left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right) = (qm - pn)w,$$

$$(\xi)'' \qquad \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right) = 2(qm - pn)\frac{dw}{dx},$$

d'où l'on tire

$$(o) \qquad \left\{ \begin{aligned} y = w &+ \frac{(qm - pn)(x - a) - q(w - b)}{qm - pn}\frac{dw}{dx} \\ &+ \frac{1}{2}\frac{[(qm - pn)(x - a) - q(w - b)]^2\left[\left(w\frac{d^2w}{dx^2}\right) - 2\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]}{w(qm - pn)^2}. \end{aligned} \right.$$

Telle est l'expression de l'inconnue; il ne reste plus qu'à remplacer w par sa valeur tirée de (λ).

Transformations relatives à la convergence. — Cette expression, calculée avec les trois premiers termes de (μ), peut ne pas être assez convergente, pour certaines valeurs de x; afin d'obtenir une plus grande approximation de l'inconnue sans calculer un quatrième terme, on peut transformer l'expression (o) au moyen des formules (10) et (11) de la génération neutre ou appliquer la méthode d'exhaustion.

En premier lieu, les formules (11) donnent

$$y = w + \frac{A_1^2\varphi(w)}{A_1 - A_2\varphi(w)};$$

et les formules (10) donnent pour A_1 et A_2,

$$A_1 = -\frac{dw}{d\varphi(w)}$$

$$A_2 = -\frac{d^2\varphi(w)\,dw}{2[d\varphi(w)]^3},$$

ou encore, par suite du changement des différentielles en dérivées,

$$A_1 = -\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)}\frac{dw}{dx},$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3}\left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)\frac{d^2w}{dx^2} - \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right)\frac{dw}{dx}\right].$$

D'après les expressions (ξ), $(\xi)'$, $(\xi)''$, on obtient donc

$$A_1 = \frac{-\varpi'}{(qm-pn)\varpi},$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\frac{\varpi\varpi''-2\varpi'^2}{(qm-pn)^2\varpi^3},$$

d'où

$$(\pi)\quad y = \varpi - \frac{\varpi\varpi'^2[(qm-pn)(x-a)-q(\varpi-b)]}{\varpi\varpi'(qm-pn)+\frac{1}{2}(\varpi\varpi''-2\varpi'^2)[(qm-pn)(x-a)-q(\varpi-b)]}.$$

Telle est l'expression de l'inconnue sous sa deuxième forme; il resterait encore à remplacer ϖ par sa valeur (λ).

En second lieu, l'application de la méthode d'exhaustion conduit à l'emploi de l'expression (27) sous la forme suivante

$$(\varpi)\qquad y = \varpi - \frac{\varphi(\varpi,\omega)}{\left(\frac{d\varphi(\varpi,\omega)}{dx}\right)}\frac{d\varpi}{dx}+\ldots$$

On a calculé les dérivées $\frac{d\varpi}{dx}$, $\frac{d^2\varpi}{dx^2}$, $\ldots$; il ne reste qu'à obtenir celles de la fonction $\varphi(\varpi,\omega)$. Mais l'équation transformée a été mise sous deux formes différentes $(\theta)'$ et $(\theta)''$; voyons les résultats auxquels conduisent ces deux formes.

Considérons d'abord la deuxième forme θ''

$$\varphi(y,\omega) = \frac{dy}{dx} - \{h + [(qm-pn)(x-\alpha) - q(y-\beta)]\omega\}y - m = 0,$$

et ne prenons que les deux premiers termes de l'expression qui précède, ce qui suffit pour montrer l'application de la méthode.

Posons

$$(qm-pn)(x-\alpha)+\beta q = \mathrm{K};$$

la fonction $\varphi(\varpi,\omega)$ devient

$$(\rho)\qquad \varphi(\varpi,\omega) = \varpi(q\varpi - \mathrm{K})\omega.$$

La première dérivée est

$$(\rho)'\qquad \left(\frac{d\varphi(\varpi,\omega)}{dx}\right) = (qm-pn)\omega.$$

Par suite, la valeur de y devient

$$(\rho)'' \qquad y = w - \frac{w(qw - \mathrm{K})}{qm - pn}\frac{dw}{dx} + \cdots;$$

la quantité ω se trouvant éliminée, la transformation $(\theta)''$ ne permet pas d'appliquer la méthode d'exhaustion ; nous verrons la raison de cette élimination dans la méthode secondaire systématique.

Examinons maintenant la transformation $(\theta)'$; nous avons

$$\varphi(w, \omega) = \frac{dw}{dx} - h\left(\frac{\mathrm{H}'}{h}\right)^{\omega} w - m,$$

ou

$$(\sigma) \qquad \varphi(w, \omega) = w h\left[1 - \left(\frac{\mathrm{H}'}{h}\right)^{\omega}\right].$$

La dérivée première est

$$(\sigma)' \qquad \left(\frac{d\varphi(w, \omega)}{dx}\right) = \omega\left(\frac{\mathrm{H}'}{h}\right)^{\omega-1}(qm - pn)w,$$

et la première valeur approchée de y, w_1, est alors

$$(\sigma)'' \qquad w_1 = w - \frac{h\left[1 - \left(\frac{\mathrm{H}'}{h}\right)^{\omega}\right]}{\omega\left(\frac{\mathrm{H}'}{h}\right)^{\omega-1}(qm - pn)}\frac{dw}{dx}.$$

Pour obtenir une seconde valeur plus approchée w_2 de l'inconnue y, suivant la valeur que l'on donnera à la seconde quantité arbitraire ω, on devra faire encore usage de l'expression (ϖ), dans laquelle on substituera w_1 à w. A cet effet, les dérivées $\frac{dw_1}{dx}$, $\frac{d^2w_1}{dx^2}$, $\cdots$ doivent être calculées au moyen de l'expression $(22)''$, c'est-à-dire

$$\frac{dw_1}{dx} = \frac{dw}{dx} - \frac{\varphi(w_1\omega)}{\left(\frac{d\varphi(w_1\omega)}{dx}\right)}\frac{d^2w}{dx^2} + \cdots,$$

autrement

$$(\sigma)''' \qquad \frac{dw_1}{dx} = \frac{dw}{dx} - \frac{h\left[1 - \left(\frac{\mathrm{H}'}{h}\right)^{\omega}\right]}{\omega\left(\frac{\mathrm{H}'}{h}\right)^{\omega-1}(qm - pn)}\frac{d^2w}{dx^2} + \cdots,$$

en faisant

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = h\left(\frac{H'}{h}\right)^\omega \frac{dw}{dx} + \omega\left(\frac{H'}{h}\right)^{\omega-1}\left(qm - pn - q\frac{dw}{dx}\right)w.$$

Quant aux valeurs de $\varphi(w_1, \omega_1)$ et de ses dérivées, elles se calculent comme plus haut. Supposons $\omega_1 = 1$, pour avoir, à cette seconde approximation, la valeur de l'inconnue y, nous aurons

$$(\sigma)^{\text{IV}} \quad y = w_1 - \frac{\frac{dw_1}{dx} - [(qm - pn)(x - a) - q(w_1 - b) - cp]w_1 - m}{w_1(qm - pn)} \frac{dw_1}{dx},$$

en déterminant w_1 et $\frac{dw_1}{dx}$, d'après $(\sigma)''$ et $(\sigma)'''$.

Troisième exemple. — Prenons encore un exemple d'intégration : soit l'équation du troisième ordre, citée par Wronski dans le Tome I[er] de la *Réforme*,

$$(\alpha) \qquad x\frac{d^3y}{dx^3} - 3y^2\frac{dy}{dx} + x^3y^5\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} = 0.$$

L'équation transformée peut s'écrire, d'après Wronski,

$$(\beta) \qquad \frac{d^3y}{dx^3} + \left(x^2y^5\frac{dy}{dx}\right)^\omega \frac{d^2y}{dx^2} - 3\left(\frac{y^2}{x}\right)^\omega \frac{dy}{dx} = 0,$$

et, faisant $\omega = 0$, on obtient l'équation réduite

$$(\gamma) \qquad \frac{d^3 w}{dx^3} + \frac{d^2 w}{dx^2} - 3\frac{dw}{dx} = 0.$$

On peut admettre que les valeurs initiales se confondent avec les valeurs moyennes, et que l'on ait pour

$$(\gamma)' \qquad x = 1, \quad y = 1, \quad \frac{dy}{dx} = 1 \quad \text{et de même} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 1.$$

L'équation caractéristique

$$(\delta) \qquad b^3 + b^2 - 3b = 0$$

donne une racine nulle, et les autres sont

$$(\delta)' \qquad \beta = -\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{13}\right) \quad \text{et} \quad \mathit{6} = -\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{13}\right);$$

par suite, C_1, C_2, C_3 étant les constantes d'intégration, il vient

$$(\varepsilon) \qquad \left\{\begin{aligned} w &= C_1 + C_2 e^{\beta x} + C_3 e^{\mathit{6}x}, \\ \frac{dw}{dx} &= C_2 \beta\, e^{\beta x} + C_3 \mathit{6}\, e^{\mathit{6}x}, \\ \frac{d^2 w}{dx^2} &= C_2 \beta^2 e^{\beta x} + C_3 \mathit{6}^2 e^{\mathit{6}x}, \\ \frac{d^3 w}{dx^3} &= C_2 \beta^3 e^{\beta x} + C_3 \mathit{6}^3 e^{\mathit{6}x}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

D'après les conditions qui précèdent, on a, pour la détermination des constantes, les équations

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2 e^{\beta} + C_3 e^{\mathit{6}}, \\ 1 &= C_2 \beta e^{\beta} + C_3 \mathit{6} e^{\mathit{6}}, \\ 1 &= C_2 \beta^2 e^{\beta} + C_3 \mathit{6}^2 e^{\mathit{6}}, \end{aligned}$$

d'où

$$(\varepsilon)' \qquad \left\{\begin{aligned} C_1 &= \frac{(\beta - 1)(\mathit{6} - 1)}{\beta \mathit{6}}, \\ C_2 &= \frac{\mathit{6} - 1}{\beta(\mathit{6} - \beta) e^{\beta}}, \\ C_3 &= \frac{\beta - 1}{\mathit{6}(\beta - \mathit{6}) e^{\mathit{6}}}. \end{aligned}\right.$$

Formons maintenant les quantités $\varphi(w)$, $\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)$, $\ldots$, l'équation proposée donne

$$\varphi(w) = \frac{d^3 w}{dx^3} + x^2 w^5 \frac{dw}{dx} \frac{d^2 w}{dx^2} - 3 \frac{w^2}{x} \frac{dw}{dx},$$

et l'équation réduite permet d'éliminer la dérivée troisième de w; on a donc

$$(\zeta) \qquad \varphi(w) = \left(x^2 w^5 \frac{dw}{dx} - 1\right) \frac{d^2 w}{dx^2} - 3\left(\frac{w^2}{x} - 1\right) \frac{dw}{dx}.$$

D'après $(23)'$, on a aussi

$$(\eta) \qquad \left(\frac{d\varphi(\varpi)}{dx}\right) = -2x\varpi^5 \frac{d\varpi}{dx}\frac{d^2\varpi}{dx^2} - 3\frac{\varpi^2}{x^2}\frac{d\varpi}{dx},$$

d'où

$$(\theta) \qquad y = \varpi + \frac{\left(x^2\varpi^5\dfrac{d\varpi}{dx} - 1\right)\dfrac{d^2\varpi}{dx^2} - 3\left(\dfrac{\varpi^2}{x} - 1\right)\dfrac{d\varpi}{dx}}{2x\varpi^5\dfrac{d\varpi}{dx}\dfrac{d^2\varpi}{dx^2} - 3\dfrac{\varpi^2}{x^2}\dfrac{d\varpi}{dx}} + \ldots,$$

les dérivées de ϖ étant déterminées par (ε).

Introduction d'une fonction arbitraire. — On pourrait maintenant appliquer la méthode d'exhaustion comme nous l'avons fait plus haut, mais ici le calcul serait pénible, à cause de la complication de l'expression précédente; il devient alors utile de recourir à un autre moyen pour rendre cette expression plus convergente. A cet effet, nous pouvons utiliser les fonctions arbitraires; il est visible alors que, si nous prenons pour fonction arbitraire l'exponentielle e^{rx}, introduite comme nous l'avons montré dans l'équation (18), nous aurons pour ϖ une expression de la même forme que plus haut, (ε), avec une exponentielle de plus. Nous pouvons donc disposer de la constante r de telle sorte que la nouvelle valeur fondamentale ϖ soit plus rapprochée de la fonction inconnue y que celle que nous venons d'obtenir (θ).

Nous prendrons ainsi pour équation transformée

$$(\iota) \qquad \frac{d^3y}{dx^3} + \left(x^2y^5\frac{dy}{dx}\right)^\omega \frac{d^2y}{dx^2} - \left(3\frac{y^2}{x}\right)^\omega \frac{dy}{dx} = (1-\omega)e^{rx},$$

de sorte que l'équation réduite devient

$$(\varkappa) \qquad \frac{d^3\varpi}{dx^3} + \frac{d^2\varpi}{dx^2} - 3\frac{d\varpi}{dx} = e^{rx},$$

et la valeur fondamentale est

$$(\varkappa)' \qquad \varpi = C_1 + C_2e^{\beta x} + C_3e^{\delta x} + R\,e^{rx},$$

en faisant

$$(\varkappa)'' \qquad R = \frac{1}{r(r-\beta)(r-\vartheta)}.$$

On peut donner à r la valeur $-\vartheta$, ce qui conduit à

$$(\varkappa)''' \qquad R = \frac{-1}{2\vartheta^2(\vartheta+\beta)}.$$

Quant aux valeurs des constantes, elles sont, quels que soient r et R;

$$(\lambda) \qquad \begin{cases} C_1 = \dfrac{(\beta-1)(\vartheta-1)+Rr(\beta+\vartheta+r)e^r}{\beta\vartheta}, \\ C_2 = \dfrac{\vartheta-1+Rr(r-\vartheta)e^r}{\beta(\vartheta-\beta)e^\beta}, \\ C_3 = \dfrac{\beta-1+Rr(r-\beta)e^r}{\vartheta(\beta-\vartheta)e^\vartheta}. \end{cases}$$

La fonction arbitraire modifie peu le calcul des constantes, car l'équation réduite ne diffère, pour la valeur initiale de l'équation proposée, que par la dérivée d'ordre le plus élevé entrant dans l'équation et par celles des ordres supérieurs.

Les valeurs de la fonction $\varphi(w)$ et de sa première dérivée sont

$$(\mu) \qquad \begin{cases} \varphi(w) = \left(x^2 w^5 \dfrac{dw}{dx} - 1\right)\dfrac{d^2 w}{dx^2} - 3\left(\dfrac{w^2}{x} - 1\right)\dfrac{dw}{dx} + e^{rx}, \\ \left(\dfrac{d\varphi(w)}{dx}\right) = -\,2xw^5\dfrac{dw}{dx}\dfrac{d^2w}{dx^2} - 3\dfrac{w^2}{x^2}\dfrac{dw}{dx} + re^{rx}, \end{cases}$$

d'où

$$(\nu) \qquad y = w + \frac{\left(x^2 w^5 \dfrac{dw}{dx} - 1\right)\dfrac{d^2 w}{dx^2} - 3\left(\dfrac{w^2}{x} - 1\right)\dfrac{dw}{dx} + e^{rx}}{2xw^5\dfrac{dw}{dx}\dfrac{d^2w}{dx^2} + 3\dfrac{w^2}{x^2}\dfrac{dw}{dx} - re^{rx}} + \cdots$$

En comparant cette expression (ν) à la précédente (θ), on voit qu'il est possible de déterminer la quantité r de telle sorte que la nouvelle valeur fondamentale w représente mieux la fonction inconnue y que la première. Pour cela, il suffit d'égaler la quantité Re^{rx} au second terme de l'expression de y donnée par (θ), que nous représenterons, pour

abréger, par $f(x)$, et de déterminer la valeur la plus convenable de r satisfaisant à l'équation

$$e^{rx} = r(r-\beta)(r-\mathrm{б})f(x),$$

dans les limites que l'on se sera assignées. On aura, de cette manière, la valeur de $(\varkappa)'$ de ϖ, et l'on calculera ensuite facilement l'expression (ν) de y, puisqu'il suffit d'ajouter un nouveau terme aux termes déjà calculés de ϖ et de ses dérivées.

Dans certains cas, ce moyen assez rapide, permettant d'obtenir des valeurs approchées de l'inconnue, devra être préféré à la méthode d'exhaustion.

L'équation caractéristique (δ) ayant toutes ses racines réelles, il n'est pas nécessaire de faire intervenir les sinus; cependant, comme il peut être utile de reconnaître certaines transformations, nous allons introduire les sinus hyperboliques dans la valeur fondamentale ϖ.

On a généralement

$$\mathfrak{cos}\, x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$
$$\mathfrak{sin}\, x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x});$$

on en conclut

$$(\xi) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varpi = {} & C_1 + C_2(\mathfrak{cos}\,\beta x + \mathfrak{sin}\,\beta x) \\ & + C_3(\mathfrak{cos}\,\mathrm{б} x + \mathfrak{sin}\,\mathrm{б} x) + R(\mathfrak{cos}\, rx + \mathfrak{sin}\, rx)\,; \end{aligned} \right.$$

de plus, si l'on met les racines β et $\mathrm{б}$ sous la forme

$$\beta = -a - b, \quad \mathrm{б} = -a + b,$$

en faisant $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}\sqrt{13}$, on a, d'après la valeur $(\varkappa)'''$ choisie pour r,

$$r = a - b,$$

ce qui donne, en développant l'expression (ξ),

$$(\xi)' \qquad \left\{ \begin{aligned} \varpi = C_1 & + (C_2 + C_3 + R)\,\mathfrak{cos}\, ax\, \mathfrak{cos}\, bx \\ & - (C_2 - C_3 + R)\,\mathfrak{cos}\, ax\, \mathfrak{sin}\, bx \\ & - (C_2 + C_3 - R)\,\mathfrak{sin}\, ax\, \mathfrak{cos}\, bx \\ & + (C_2 - C_3 - R)\,\mathfrak{sin}\, ax\, \mathfrak{sin}\, bx, \end{aligned} \right.$$

Il est inutile de poursuivre davantage ces calculs : l'équation proposée n'a aucune signification par elle-même; elle a été remise autrefois à Wronski pour défier ce géomètre. L'équation (α) n'offre d'autre intérêt que celui de nous avoir conduit à des transformations importantes qui se reproduisent dans les ordres plus élevés, et qui indiquent alors l'emploi des sinus d'ordres supérieurs, comme nous devrions le montrer maintenant. Mais, pour donner les applications de ces sinus, nous serions obligé d'en faire connaître certaines propriétés, ce qui nous entraînerait à une digression beaucoup trop longue; c'est pourquoi nous laisserons de côté ces applications pour l'instant, d'autant plus qu'elles ne sont pas indispensables dans la méthode dont nous nous occupons; elles le seront, au contraire, quand il s'agira de la méthode systématique.

Nous allons continuer ces intégrations en prenant pour exemple une équation contenant des différences, puis une équation aux dérivées partielles à coefficients variables; nous ferons aussi des applications numériques.

Résumé de la méthode d'intégration.

Pour résumer ce que nous avons dit de l'intégration des équations différentielles qui ne contiennent qu'une variable indépendante x, nous rappellerons qu'en désignant par y la fonction inconnue, nous avons représenté l'équation différentielle proposée par

$$(a) \qquad \varphi(y) = 0;$$

de plus, F étant une fonction explicite de y, nous avons trouvé pour l'expression de cette fonction

$$F(y) = F(w) - \frac{\varphi(w)}{d\varphi(w)} dF(w) + \frac{1}{2}[\varphi(w)]^2 \frac{d\varphi(w)\, d^2F(w) - d^2\varphi(w)\, dF(w)}{(d\varphi(w)^3)} - \ldots,$$

ou, en introduisant les dérivées par rapport à x pour l'exécution des calculs,

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned} F(y) &= F(w) - \frac{\varphi(w)}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)} \left(\frac{dF(w)}{dx}\right) \\ &+ \frac{1}{2}[\varphi(w)]^2 \frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3} \left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right) \left(\frac{d^2F(w)}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right) \left(\frac{dF(w)}{dx}\right) \right] - \ldots \end{aligned} \right.$$

$\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)$ désigne spécialement la dérivée par rapport à x de la fonction $\varphi(w)$ considérée seulement comme fonction de w.

L'intégration de l'équation proposée est donnée au moyen d'une fonction w complètement arbitraire en principe; mais dans les applications, pour que le développement soit convergent, il faut que cette

fonction ϖ soit aussi rapprochée que possible de la fonction inconnue y. S'il existe plusieurs solutions, l'expression précédente les donnera en général, pourvu que la fonction ϖ soit convenablement choisie. Or, on pourra toujours déterminer cette fonction, ou valeur fondamentale, ϖ, en réduisant l'équation proposée à une équation linéaire à coefficients constants toujours intégrable par les moyens ordinaires; à cet effet, on remplacera, dans les coefficients, les quantités variables par des valeurs moyennes se rapportant aux limites entre lesquelles on doit prendre les quantités x, et par suite y; l'équation ainsi formée, appelée *équation réduite*, conduit ordinairement, par sa valeur fondamentale ϖ, à l'intégrale générale de l'équation proposée, parce que l'on introduit de cette façon autant de constantes arbitraires que l'intégration complète en comporte. Quant aux intégrales singulières, elles sont déterminées par un choix convenable de l'équation réduite.

Si le développement obtenu pour y, ou Fy, n'est pas assez convergent, on aura recours à des moyens auxiliaires donnant une convergence plus rapide :

1° On peut transformer le développement (b) au moyen des formules (10) et (11) de la *génération neutre*. Cette opération consiste, ainsi que nous l'avons dit, à remplacer le développement par une fraction continue équivalente, suivant le procédé indiqué par Wronski, et à en calculer les réduites successives. Cette fraction continue donnant toujours lieu à un développement convergent, les réduites, ou *progrès* successifs de la génération neutre, formeront une suite d'expressions approchant de plus en plus de la fonction cherchée. Il est facile de reconnaître, par cette transformation, que l'indétermination qui se présente, lorsque les coefficients de l'équation proposée sont des fonctions de y seulement, peut toujours être levée.

2° On peut appliquer la méthode d'exhaustion; on obtient ainsi une valeur plus approchée que celle que l'on obtiendrait directement, en faisant varier convenablement la quantité auxiliaire ω qui sert à former l'équation transformée et d'où l'on tire l'équation réduite.

3° En introduisant une fonction arbitraire dans l'équation réduite, on peut obtenir une valeur fondamentale ϖ, assez rapprochée de l'inconnue y pour que le développement soit plus convergent que sans

cette fonction arbitraire. Pour faciliter les calculs, il y a avantage à employer la fonction se^{rx}, où s et r sont des constantes, parce que la solution de l'équation réduite conserve la même forme que si la fonction arbitraire n'existait pas.

4° Enfin, on peut encore remplacer les valeurs moyennes par d'autres valeurs moyennes calculées au moyen des premières, et arriver ainsi, de proche en proche, à des valeurs aussi éloignées que l'on voudra des valeurs initiales.

En opérant par les moyens que nous venons d'énumérer, on parviendra généralement à obtenir telles valeurs que l'on voudra de la fonction inconnue, et un usage régulier des quantités arbitraires ϖ, ω, se^{rx} permettra, dans bien des cas, d'arriver rapidement au résultat cherché; mais la détermination la plus convenable de ces quantités arbitraires demande une certaine habileté, un certain *art* : c'est pour cette raison que Wronski donne le nom de *technie* à l'ensemble des méthodes du genre de celles que nous exposons.

Nous allons montrer par quelques exemples numériques comment les calculs doivent être conduits; ces exemples achèveront de faire comprendre ce que nous avons dit.

Quatrième exemple. Calculs numériques. — Reprenons l'équation que nous avons traitée dans le deuxième exemple, en adoptant pour les coefficients les valeurs numériques suivantes :

$$a = 0, \qquad p = q = 0{,}0015,$$
$$b = 40, \qquad m = 0,$$
$$c = 10, \qquad n = 0{,}6.$$

La première équation (γ) du deuxième exemple devient

$$(c) \qquad \frac{dy}{dx} + p(nx + y - b + c) = 0,$$

et son équation réduite (ι) est

$$(d) \qquad \frac{d\varpi}{dx} + cp\varpi = 0,$$

d'où la valeur fondamentale

$$(d)' \qquad \varpi = be^{-cpx};$$

par suite, l'inconnue donnée par l'expression précédente ou par celle du deuxième exemple (o) se trouve être, en faisant usage de la notation des dérivées,

$$(e) \qquad y = \varpi + \frac{nx+\varpi-b}{n}\varpi' + \frac{1}{2}\left(\frac{nx+\varpi-b}{n}\right)^2\left(\varpi'' - 2\frac{\varpi'^2}{\varpi}\right).$$

Calculons la valeur de l'inconnue pour la valeur $x=5$, on a

$$(f) \qquad \varpi = 37,1097, \quad \varpi' = -0,55664, \quad \varpi'' = 0,00602;$$

cette dernière valeur est donnée par l'équation (c) différentiée, savoir

$$\varpi'' = -p[(nx+2\varpi-b+c)\varpi' + n\varpi];$$

puis la valeur de l'inconnue est

$$(e)' \qquad y = 37,1096 - 0,1016 - 0,0002 = 37,0079.$$

1° Le développement est ici assez convergent, aussi le calcul au moyen de la formule (π) de la génération neutre ne donne-t-il pas plus d'approximation. On a, en effet,

$$(g) \qquad y = \varpi - \frac{nx+\varpi-b}{\varpi' n + \frac{1}{2}\left(\varpi'' - 2\frac{\varpi'^2}{\varpi}\right)(nx+\varpi-b)}\varpi'^2,$$

ce qui donne, pour $x=5$,

$$(g)' \qquad y = 37,1097 - 0,1018 = 37,0078.$$

On peut vérifier ici que, pour $n = 0$, l'expression (e) est essentiellement divergente, puisque les termes deviennent infinis, tandis que, pour la même valeur de n, la seconde expression est parfaitement déterminée.

2° Pour appliquer la méthode d'exhaustion, on doit partir des valeurs fondamentales données par l'équation réduite; mais si l'on veut calculer la dérivée seconde et les dérivées supérieures autrement que par cette équation réduite, il faut les tirer de l'équation transformée

$$(h) \qquad y' + cp\left(\frac{nx + y - b + c}{c}\right)^{\omega} y = 0,$$

d'où

$$y'' + cp\left[\left(\frac{nx + y - b + c}{c}\right)^{\omega} y' + \omega\left(\frac{nx + y - b + c}{c}\right)^{\omega - 1} \frac{n + y'}{c} y\right],$$

et ainsi de suite pour les autres dérivées. Ce moyen, plus compliqué, quoique plus exact, est inutile, parce que les valeurs de ces dérivées sont rectifiées par la suite du calcul; ici d'ailleurs, à cause de la convergence de l'expression (e), les valeurs de ces dérivées, calculées d'une manière ou d'une autre, différeraient assez peu; nous adopterons donc les valeurs déjà trouvées (f).

Maintenant nous avons pour une valeur quelconque ϖ_q correspondant à ω_q,

$$(i) \left\{ \begin{aligned} \varpi_q &= \varpi_{q-1} \\ &\quad + \frac{\varpi'_{q-1}(nx + \varpi_{q-1} - b + c)^{1-\omega_q} + pc^{1-\omega_q}(nx + \varpi_{q-1} - b + c)\varpi_{q-1}}{\omega_q pn \varpi_{q-1}} \varpi'_{q-1} + \ldots, \\ \varpi'_q &= \varpi'_{q-1} \\ &\quad + \frac{\varpi'_{q-1}(nx + \varpi_{q-1} - b + c)^{1-\omega_q} + pc^{1-\omega_q}(nx + \varpi_{q-1} - b + c)\varpi_{q-1}}{\omega_q pn \varpi_{p-1}} \varpi''_{q-1} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

et ainsi de suite pour les autres dérivées.

Pour $q = 1$, ces expressions se simplifient, elles deviennent

$$(i)' \left\{ \begin{aligned} \varpi_1 &= \varpi - \left[c^{\omega_1}(nx + \varpi - b + c)^{1-\omega_1} - (nx + \varpi - b + c)\right] \frac{\varpi'}{\omega_1 n} + \cdots, \\ \varpi'_1 &= \varpi' - \left[c^{\omega_1}(nx + \varpi - b + c)^{1-\omega_1} - (nx + \varpi - b + c)\right] \frac{\varpi''}{\omega_1 n} + \cdots, \end{aligned} \right.$$

et ainsi de suite. Pour $\omega_q = 1$, on a

$$w_q = y.$$

En appliquant ces formules, nous obtenons pour :

I. $\omega_1 = \frac{1}{3}$,

$$(j) \qquad \begin{cases} w_1 = 37,10972 - 0,10214 = 37,00758, \\ w'_1 = -\ 0,55664 + 0,00110 = -\ 0,55554, \end{cases}$$

et nous conserverons pour w''_1 la valeur précédente de w''.

II. $\omega_2 = \frac{2}{3}$.

$$(j)' \qquad \begin{cases} w_2 = 37,00758 + 0,00004 \ = 37,00762, \\ w'_2 = -\ 0,55554 - 0,0000005 = -\ 0,55554. \end{cases}$$

On voit, pour cette seconde valeur de ω, que la correction ne porte pas sur la première dérivée.

III. $\omega_3 = 1$.

$$(j)'' \qquad y = 37,00762 + 0,00011 = 37,00773.$$

Nous trouvons ainsi, pour l'inconnue, à peu près le résultat précédent, bien que nous n'ayons pris que deux termes du développement.

3° Pour exécuter le calcul avec la fonction arbitraire se^{rx}, nous avons l'équation transformée

$$(k) \qquad y' + cp\left(\frac{nx + y - b + c}{c}\right)^{\omega} y + s(1 - \omega)e^{rx} = 0.$$

En faisant $\omega = 0$, l'intégration donne

$$(k)' \qquad \begin{cases} w = \left(b + \dfrac{s}{r + cp}\right)e^{-cpx} - \dfrac{s}{r + cp}\,e^{rx}, \\ w' = -\,cp\left(b + \dfrac{s}{r + cp}\right)e^{-cpx} - \dfrac{sr}{r + cp}\,e^{rx}, \end{cases}$$

et, si l'on représente par u le second terme de l'expression de ϖ, il vient

$$(l)\quad \begin{cases} y = \varpi + \dfrac{p(nx+\varpi-b)\varpi-(r+cp)u}{pn\varpi}\varpi' \\ \quad + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{p(nx+\varpi-b)\varpi-(r+cp)u}{pn\varpi}\right]^2\left(\varpi''-2\dfrac{\varpi'^2}{\varpi}\right). \end{cases}$$

Pour appliquer cette formule avec deux termes seulement, nous ferons

$$(m)\qquad s=1, \quad r=-20,$$

et nous prendrons $r+cp=-20$, au lieu de $19,985$; à cause de la très faible valeur de e^{rx}, les termes qui contiennent u en facteur sont nuls très sensiblement. Nous avons donc

$$\varpi = \left(40-\frac{1}{20}\right)e^{-0,015.x};$$

pour $x=5$, il vient

$$\varpi = 37,0633,$$
$$\varpi' = -0,55595;$$

par suite, l'expression précédente donne, avec deux termes,

$$(l)'\qquad y = 37,0633 - 0,05865 = 37,0047.$$

Ce calcul suffit pour montrer comment on doit faire usage d'une fonction arbitraire pour abréger les calculs; l'emploi de cette fonction suppose que l'on ait une idée de l'approximation donnée par la valeur fondamentale, approximation que l'on peut évaluer par un ou deux rapides tâtonnements.

4° Enfin on peut effectuer les calculs au moyen d'un changement de constantes arbitraires. Calculons d'abord la valeur de y pour $x=2,5$; la formule (c), telle que nous l'avons déjà employée, donne avec deux termes

$$\varpi = 38,5276,$$
$$\varpi' = -0,57791,$$

d'où

$$(n) \qquad y = 38,5276 - 0,02658 = 38,50118.$$

Avec cette valeur, déterminons la nouvelle équation réduite; les valeurs moyennes sont maintenant

$$(p) \qquad \alpha = 2,5, \quad \beta = 38,50118;$$

nous les prendrons pour nouvelles valeurs initiales, et l'équation réduite devient

$$w' + p(n\alpha + \beta - b + c)w = 0,$$

ou

$$(q) \qquad w' + 0,015002.w = 0,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$w = \text{const.}\, e^{-0,015002.x}.$$

La constante est déterminée par la condition

$$\beta = \text{const.}\, e^{-0,015002\,\alpha},$$

d'où

$$\text{const.} = 39,9727.$$

Maintenant, pour $x = 5$, on a

$$w = 39,9727.e^{-0,015002.5} = 37,0840,$$

$$w' = -0,015002.37,0840 = -0,55633,$$

et la formule (e) donne, avec deux termes,

$$(r) \qquad y = 37,0840 - 0,0778 = 37,0062.$$

Tels sont les divers moyens dont on peut faire usage, ensemble ou séparément, pour faciliter l'application de la méthode secondaire. En général, il conviendra de ne pas les employer indifféremment, parce

que l'on ne rencontrera pas toujours une convergence aussi rapide que dans l'exemple précédent; le choix de ces moyens sera facile à déterminer : en tous cas, par le changement des constantes arbitraires, on parviendra toujours à obtenir des valeurs de l'inconnue aussi éloignées que l'on voudra des valeurs initiales.

Rappelons encore que la méthode présente pourra se trouver en défaut dans certains cas, ainsi que Wronski l'a fait voir par un exemple; on devra recourir à une autre méthode. Néanmoins, celle-ci pourra rendre de grands services et être presque toujours utilisée.

Nous venons de traiter l'exemple précédent au moyen d'une équation réduite linéaire à coefficients constants; l'intégrale trouvée est ainsi l'intégrale générale, puisqu'elle comporte une constante arbitraire. Mais, dans le second exemple, nous avons indiqué plusieurs manières de former l'équation réduite; il est donc permis de supposer que les résultats que l'on obtiendrait avec ces différentes équations ne seront pas identiques; voyons ce qu'il en est. Pour cela, reprenons l'équation proposée et examinons le caractère qu'elle présente.

L'équation (c)

$$y' + p(nx - b + c)y + py^2 = 0,$$

intégrée par les moyens ordinaires, donne

$$(s) \qquad y = b \frac{e^{-\frac{1}{2}pnx^2 + p(b-c)x}}{1 + bp\int_0^x e^{-\frac{1}{2}pnx^2 + p(b-c)x}\,dx}.$$

Cette intégration s'obtient en posant, *a priori*,

$$y = \frac{u}{v},$$

u et v étant deux fonctions auxiliaires qui, déterminées d'après l'équation proposée, donnent la solution précédente, ainsi que la solution $y = 0$. De même, si l'on avait l'équation

$$(t) \qquad y' - P'y + py^2 = 0,$$

P' et p étant deux fonctions quelconques de x, on trouverait pour équation primitive

$$(u) \qquad y \int p e^{P}\, dx - e^{P} = 0.$$

Ce résultat est identique au précédent en faisant

$$(v) \qquad P' = -p(nx - b + c).$$

L'intégrale (s) contient une constante arbitraire, la quantité b qui se trouve en dehors des exposants. Cette relation semble ainsi donner l'intégrale générale ; cependant la constante ne peut être éliminée entre l'équation (s) et la même différentiée, ou entre (u) et celle-ci

$$(u)' \qquad y' \int p e^{P}\, dx + y p e^{P} - P' e^{P} = 0,$$

sans que l'exponentielle disparaisse également ; cette exponentielle a donc le caractère d'une fonction singulière : par suite, l'intégrale trouvée (s) ou (u) n'est qu'une intégrale singulière. Ce fait est vérifié par les valeurs de l'inconnue calculées au moyen des formules de Wronski et au moyen de l'expression (s), valeurs qui diffèrent complètement. Il en résulte que les formules de Wronski contenant une constante arbitraire donnent l'intégrale générale, tandis que l'expression (s) ne donne qu'une intégrale singulière de l'équation différentielle proposée.

Les intégrales singulières exigent que le problème que l'on traite présente par lui-même des conditions telles que les relations qui ont lieu entre l'équation primitive et ses dérivées, d'après l'équation proposée, puissent se traduire par l'élimination de fonctions singulières ; autrement, sans cette condition préalable, les relations entre l'équation primitive et ses dérivées ne peuvent être exprimées que par suite de l'élimination de constantes, ce qui peut toujours avoir lieu. D'une autre manière, nous disons qu'il faut distinguer les conditions relatives au problème dont on s'occupe des conditions algorithmiques relatives à l'équation différentielle du problème. Ces deux espèces de conditions sont indépendantes en elles-mêmes ; mais, quand on attache à l'équation différentielle le sens que lui donne le problème que l'on traite, les

conditions devant concorder, il en résulte certaines solutions, tandis que toutes les autres sont éliminées. Ainsi, les problèmes n'admettent généralement pas par eux-mêmes de solutions singulières : celles-ci n'existent qu'exceptionnellement, et, dans ce cas exceptionnel, on est toujours averti qu'il existe une solution singulière par le problème proposé lui-même; au contraire, les équations différentielles admettent le plus souvent des solutions singulières (1).

(1) Les ouvrages classiques contiennent peu de détails concernant les solutions singulières; pour cette raison, nous croyons devoir insister sur ce point important sans craindre de nous répéter.

Il faut se rappeler ce que nous avons déjà dit de la formation des équations différentielles. Nous ne considérons expressément que les équations pouvant représenter les énoncés de problèmes tels qu'ils se présentent dans la réalité; il est donc nécessaire de distinguer le problème en lui-même de l'équation qui en représente l'énoncé. Ces deux choses, bien distinctes en elles-mêmes, n'en font qu'une seule au point de vue des applications, et c'est là le cas que nous envisageons exclusivement. Le problème est la chose donnée, le *fond* de la question, tandis que l'expression algorithmique n'en est que la *forme*. Une même forme peut appartenir à la fois à plusieurs problèmes différents, c'est-à-dire que l'interprétation d'une équation différentielle prise isolément offre une certaine indétermination.

Les équations contiennent ordinairement deux espèces de solutions : les solutions ordinaires peuvent satisfaire à un problème, tandis que les solutions spéciales ou singulières satisferont à un autre, et ce sont les conditions propres au problème qui font accepter ou rejeter une solution. En particulier, les conditions algorithmiques spéciales qui conduisent aux intégrales singulières doivent être la traduction de certaines conditions propres au problème dont il s'agit ; si ces conditions n'existent pas, les solutions singulières de l'équation, en tant qu'équation purement algorithmique, n'ont aucune interprétation, et l'intégrale générale existe seule, puisqu'elle n'exige aucune condition algorithmique spéciale.

Dans les équations différentielles, il n'y a qu'une seule intégrale générale, celle qui correspond aux seules constantes arbitraires; toutes les autres, exigeant une ou plusieurs conditions algorithmiques spéciales, sont comprises sous le nom d'*intégrales singulières*. Ces conditions n'excluent pas ordinairement les constantes arbitraires des relations algorithmiques qui les expriment, bien que l'on ait énoncé quelquefois le contraire; l'exemple que nous traitons montre que, si l'on considère l'équation primitive (s), on ne peut éliminer la constante arbitraire entre cette équation et sa dérivée, sans éliminer en même temps une fonction; cette fonction se trouve être ainsi une fonction singulière.

En un mot, il ne faut donner à une équation différentielle que la signification

Si l'on considère les équations primitives singulières comme ne devant pas contenir de constantes arbitraires, on fait une restriction qui ne doit pas avoir lieu ordinairement, ou une confusion entre l'équation primitive générale et les équations primitives singulières, car l'existence de celles-ci ne dépend que de la possibilité de l'élimination de certaines fonctions qui sont quelconques, si l'on considère les équations différentielles en général; ces fonctions quelconques contiennent évidemment des constantes qui peuvent, de cette manière, se retrouver dans les équations primitives singulières. L'équation (c) en est un exemple.

Dans le problème que nous examinons, puisqu'il n'existe aucune condition spéciale, la solution qui convient est celle que nous avons obtenue par la méthode de Wronski.

La méthode ordinaire, qui consiste à déduire les intégrales singulières de l'intégrale générale, pourrait conduire à la relation qui donne la solution singulière; mais, ici, nous ne connaissons l'intégrale générale que sous la forme résolue $y = f(x)$, et $f(x)$ est un développement qui se prête difficilement à une comparaison avec l'intégrale singulière trouvée.

Remarquons encore que l'intégration ordinaire d'une équation différentielle conduit à une équation primitive qu'il faut ensuite résoudre : ce sont là deux problèmes dont on ne peut pas toujours obtenir la solution. La méthode de Wronski a cela d'avantageux qu'elle donne l'équation primitive toute résolue, et, comme elle donne aussi l'expression d'une fonction quelconque $F(y)$ de l'inconnue, on voit que l'on peut mettre encore l'équation primitive sous un nombre indéfini de formes différentes.

Profitons de la solution singulière (s) pour appliquer les formules que nous avons données dans la digression sur les séries, de (ι) à $(\varkappa)$ et $(\alpha\alpha)$, $(\alpha\beta)$.

---

propre au problème qu'elle représente; cette signification est *nécessaire* et les autres interprétations qu'on pourrait en donner sont *contingentes;* cette distinction, tout évidente, justifie ce que nous venons de dire. Il en résulte que les interprétations géométriques des intégrales, telles qu'on les produit ordinairement, ont un simple caractère de contingence, à moins que les problèmes traités ne se rattachent spécialement à des questions de Géométrie.

Commençons par calculer l'intégrale singulière par la formule de Maclaurin : nous avons

$$(aa)\quad \begin{cases} y' = -p(nx+y-b+c)y, \\ y'' = -p[(nx+2y-b+c)y' + ny], \\ y''' = -p[(nx+2y-b+c)y'' + 2ny' + 2y'^2], \\ y^{\text{IV}} = -p[(nx+2y-b+c)y''' + 3ny'' + 6y'y''], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

puis, en faisant $x = 0$, $y = b$ et mettant pour les coefficients leurs valeurs numériques, il vient

$$y'_0 = -0{,}6,$$
$$y''_2 = +0{,}009,$$
$$y'''_0 = -0{,}000675,$$
$$y^{\text{IV}}_0 = +0{,}000074925.$$

La formule de Maclaurin donne alors

$$(ab)\quad \begin{cases} y = 40 - x.0{,}6 + x^2.0{,}0045 - x^3.0{,}0001125 \\ \qquad + x^4.0{,}000003121875 - \dots. \end{cases}$$

et pour $x = 5$ la valeur de y est

$$(ac)\quad \begin{array}{l} y = \;\; 40 \\ \quad\;\; -\; 3 \\ \hline \quad\;\; 37{,}0000 \\ \quad\;\; +\; 0{,}1125 \\ \hline \quad\;\; 37{,}1125000 \\ \quad\;\; -\; 0{,}0140625 \\ \hline \quad\;\; 37{,}0984375 \\ \quad\;\; +\; 0{,}0019511 \\ \hline \quad\;\; 37{,}1003886 \end{array}$$

Transformons la série (ab) par les formules (ι) à $(\varkappa)$; cette série, identifiée avec la série (ι), pour $a = 0$, savoir

$$(ad) \qquad y = \mathfrak{A}_0 + x\mathfrak{A}_1 + x^2\mathfrak{A}_2 + x^3\mathfrak{A}_3 + \ldots,$$

sera transformée en une autre série équivalente de la forme $(\iota)'$,

$$(ad') \quad y = A_0 + A_1\frac{x}{n+x} + A_2\left(\frac{x}{n+x}\right)^2 + A_3\left(\frac{x}{n+x}\right)^3 + \ldots,$$

dans laquelle n est une quantité arbitraire, et, d'après $(\varkappa)$, on a les relations

$$(ad)'' \qquad \begin{cases} A_1 = n\mathfrak{A}_1, \\ A_2 = n\mathfrak{A}_1 + n^2\mathfrak{A}_2, \\ A_3 = n\mathfrak{A}_1 + 2n^2\mathfrak{A}_2 + n^3\mathfrak{A}_3, \\ A_4 = n\mathfrak{A}_1 + 3n^2\mathfrak{A}_2 + 3n^3\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Il reste à déterminer une valeur de n telle que la série, transformée ainsi, soit plus convergente que la série proposée (ab).

Il est facile de voir que la valeur de n la plus convenable est comprise entre 10 et 100, et le maximum de convergence a lieu à peu près pour $n = 60$. On a en effet, d'après $(ad)''$, pour $n = 60$

$$\begin{aligned} A_1 &= -36 = -36, \\ A_2 &= -36 + 16{,}20 = -19{,}80, \\ A_3 &= -36 + 32{,}40 - 24{,}30 = 27{,}90, \\ A_4 &= -36 + 48{,}60 - 72{,}90 + 40{,}46 = -19{,}84. \end{aligned}$$

Pour $x = 5$, $\frac{x}{n+x} = \frac{1}{13}$, la série transformée est ainsi

$$(ab)' \qquad y = 40 - \frac{36}{13} - \frac{19{,}80}{169} - \frac{27{,}90}{2197} - \frac{19{,}84}{28561},$$

ce qui donne

$$(ac)' \qquad \left|\begin{array}{r} y = \quad 40{,}00000 \\ -\ \ 2{,}76923 \\ \hline 37{,}23077 \\ -\ \ 0{,}11716 \\ \hline 37{,}11361 \\ -\ \ 0{,}01270 \\ \hline 37{,}10091 \\ -\ \ 0{,}00069 \\ \hline 37{,}10022 \end{array}\right.$$

Pratiquement, il vaudrait mieux prendre $n = 50$ pour simplifier les calculs; on aurait

$$y = 37{,}10029.$$

On voit, d'après cela, que le développement de Maclaurin (ab), dans le cas actuel, n'est pas éloigné du maximum de convergence.

Calculons maintenant l'expression (s) qui contient une intégrale définie,

$$(ae) \qquad \int_0^x e^{-\frac{1}{2}pnx^2+p(b-c)x}\,dx.$$

En désignant l'exposant par P, la formule de Maclaurin donne, pour $x = 5$,

$$\int_0^5 e^{\mathrm{P}}\,dx = 5 + \frac{5^2}{1.2}\,0{,}045 + \frac{5^3}{1.2.3}\,0{,}001125 - \frac{5^4}{1.2.3.4}\,0{,}0000030375$$
$$- \frac{x^5}{1.2.3.4.5}\,0{,}00000440437 + \ldots$$

$$(af) \quad \int_0^5 e^{\mathrm{P}}\,dx = 5 + 0{,}5625 + 0{,}0234375 - 0{,}0007910 - 0{,}0001147$$
$$= 5{,}5850318.$$

La formule de Bernoulli,

$$\int f(x)\,dx = \text{const} + \frac{x}{1}f(x) - \frac{x^2}{1.2}f'(x) + \ldots,$$

est ici plus convergente ; elle donne, avec six décimales exactes,

$$(af)' \qquad \int_0^5 e^{\mathrm{P}}\,dx = 5{,}585009,$$

par suite,

$$1 + 0{,}06 \int_0^5 e^{\mathrm{P}}\,dx = 1{,}33510057,$$

et l'expression (s) devient

$$(ag) \qquad y = 40\,\frac{1{,}23831}{1{,}335100} = 37{,}1000;$$

telle est la valeur de l'inconnue avec quatre décimales exactes.

Effectuons maintenant le même calcul au moyen des formules $(\alpha\alpha)$ et $(\alpha\beta)$ de la méthode primordiale, savoir :

$$(ah) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(a) &+ \mathrm{F}'(a)\left[1 + (x-a)\,\frac{\mathrm{F}''(x)}{2\,\mathrm{F}'(x)}\right](x-a) \\ &+ \Xi_3\left(\frac{x-a}{n+x}\right)^3 + \Xi_4\left(\frac{x-a}{n+x}\right)^4 + \ldots; \end{aligned} \right.$$

les coefficients Ξ, calculés d'après $(\alpha\beta)$, sont

$$(ah)' \quad \left\{ \begin{aligned} \Xi_3 &= (n+a)^3\left[\frac{1}{2}\,\frac{[\mathrm{F}''(a)]^2}{\mathrm{F}'(a)} - \frac{1}{3}\,\mathrm{F}'''(a)\right], \\ \Xi_4 &= (n+a)^4\left[-\frac{1}{2}\,\frac{[\mathrm{F}''(a)]^3}{[\mathrm{F}'(a)]^2} + \frac{3}{4}\,\frac{\mathrm{F}''(a)\,\mathrm{F}'''(a)}{\mathrm{F}'(a)} - \frac{5}{24}\,\mathrm{F}^{\mathrm{IV}}(a)\right] + 3\Xi_3, \\ \Xi_5 &= (n+a)^5\left[\frac{1}{2}\,\frac{[\mathrm{F}''(a)]^4}{[\mathrm{F}'(a)]^3} - \left[\frac{\mathrm{F}''(a)}{\mathrm{F}'(a)}\right]^2\mathrm{F}'''(a) + \frac{1}{4}\,\frac{[\mathrm{F}'''(a)]^2}{\mathrm{F}'(a)} \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{3}\,\frac{\mathrm{F}''(a)\,\mathrm{F}^{\mathrm{IV}}(a)}{\mathrm{F}'(a)} - \frac{3}{40}\,\mathrm{F}^{\mathrm{V}}(a)\right] + 4\Xi_4 - 6\Xi_3. \end{aligned} \right.$$

Faisons

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x e^{\mathrm{P}}\,dx,$$

avec $x = 5$ et $a = 0$, il vient

$$(ai_1) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^5 e^{\mathrm{P}}\,dx = 5{,}50625 &+ 0{,}0006375\,n^3\left(\frac{5}{n+5}\right)^3 \\ &+ (0{,}0019125\,n^3 - 0{,}000001266\,n^4)\left(\frac{5}{n+5}\right)^4 \\ &+ (-0{,}0038250\,n^3 - 0{,}0000005064\,n^4 - 0{,}0000000367\,n^5)\left(\frac{5}{n+5}\right)^5 + \ldots \end{aligned} \right.$$

Il reste à déterminer la valeur de n la plus convenable; et l'on aperçoit aisément que n doit être compris entre 100 et 1000. Il est même indifférent de prendre l'un ou l'autre nombre, car la variation de la convergence est très faible, dans cet intervalle, pour les autres valeurs de n.

En fait, ces deux valeurs conduisent au même résultat à $\frac{4}{1000000}$ près.

$$(ai)' \left\{ \begin{array}{rr} \text{Pour } n = 100. & \text{Pour } n = 1000. \\ \int_0^5 e^{\text{P}} dx = 5,506250 & \int_0^5 e^{\text{P}} dx = 5,506250 \\ +\, 0,068837 & +\, 0,078503 \\ \hline 5,575087 & 5,584753 \\ +\, 0,009183 & +\, 0,000396 \\ \hline 5,584270 & 5,585149 \\ +\, 0,000723 & -\, 0,000115 \\ \hline 5,584993 & 5,585034 \end{array} \right.$$

Nous obtenons ainsi la même approximation qu'avec la formule de Maclaurin, bien que celle-ci contienne un terme de plus. Cependant la formule de Wronski a exigé un calcul plus compliqué; il ressort de là que son emploi n'est réellement avantageux que lorsque l'on peut négliger la série complémentaire. Dans ce cas, le calcul devient très rapide ([1]).

Supposons que l'on connaisse la valeur de l'intégrale pour $x = 4,5$, sachant que

$$\left(\frac{de^{\text{P}}}{dx}\right)_5 = 0,0405(e^{\text{P}})_5,$$

([1]) On remarquerait même que souvent la série complémentaire est d'autant moins convergente que le *progrès*, donnant la génération de la fonction. représente mieux cette fonction; aussi Wronski indique-t-il comme avantageux l'emploi de la génération neutre. Il dit (*Réforme*, t. I, p. lxxiij) : « Avec les quantités A_1, A_2, A_3, ... (quantités qui sont les coefficients du développement de la fonction et qui comprennent à la fois les premiers termes et ceux de la série complémentaire), les ordres supérieurs de la génération neutre donneront, pour la fonction problématique $F(x)$, ..., une détermination très générale, et, comme telle, de beaucoup supérieure à celle.... que nous avons obtenue par l'application immédiate de la méthode primordiale. »

on en déduit la suivante, pour $x = 5$,

$$(aj)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^5 e^{\mathrm{P}}\,dx &= \int_0^{4,5} e^{\mathrm{P}}\,dx + (e^{\mathrm{P}})_{4,5}(1 + 0,25 . 0,0405)\,0,5 \\ &= 4,97212 + 1,21333 . 1,010125 . 0,5 = 5,584931, \end{aligned} \right.$$

valeur exacte à $\frac{1}{10000}$ près.

La formule de Taylor conduit à un calcul plus long; on a

$$\left(\frac{de^{\mathrm{P}}}{dx}\right)_{4,5} = 0,042975\ (e^{\mathrm{P}})_{4,5},$$

$$\left(\frac{d^2e^{\mathrm{P}}}{dx^2}\right)_{4,5} = 0,001756\ (e^{\mathrm{P}})_{4,5},$$

$$(ak)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^5 e^{\mathrm{P}}\,dx &= \int_0^{4,5} e^{\mathrm{P}}\,dx + (e^{\mathrm{P}})^{4,5}\left(0,5 + \frac{0,25}{2}\,0,042975 + \frac{0,125}{6}\,0,001756\right) \\ &= 4,97212 + 1,21333 . 0,5054084 = 5,585350, \end{aligned} \right.$$

valeur exacte à $\frac{7}{10000}$ près.

Nous venons d'indiquer l'usage du premier *progrès* de la méthode primordiale; on pourrait de la même manière faire l'application du second et du troisième progrès, qui ont été donnés dans le Tome I de la *Réforme*, et le *Supplément à l'Épître à l'Empereur de Russie*, ou dans le troisième Volume de l'*Encyclopédie mathématique* de Montferrier; les expressions sont alors de plus en plus compliquées, mais on peut trouver avantage, dans certains cas, à les utiliser; de même, par une certaine combinaison du premier et du second progrès, on pourrait intégrer l'équation différentielle qui nous a servi d'exemple (*voir* la *Réforme*, t. I, p. 352).

Néanmoins, le premier progrès, à cause de la simplicité de son expression, sera souvent d'une application avantageuse. Wronski donne, au moyen de cette formule, un exemple de calcul de logarithmes à 10 décimales; il a d'ailleurs construit, ainsi, des Tables disposées sous forme de *canons* [1].

---

[1] Les canons à 7 décimales contiennent environ 1000 nombres; le premier

Mais là ne se borne pas l'application du premier progrès de la méthode primordiale : nous pensons qu'il devra servir encore utilement au calcul des Tables de sinus du second et du troisième ordre ; ces Tables seront nécessaires le jour où l'on voudra appliquer les méthodes d'intégration de Wronski, et principalement la méthode secondaire systématique. Si l'on songe à la complication et à l'étendue des Tables à double entrée des fonctions elliptiques, ou autres fonctions analogues, on se convaincra facilement que les Tables des sinus devront être exécutées avec beaucoup plus de rapidité ; elles seront très pratiques et d'un usage général, tandis que les premières ne seront que d'un usage restreint.

Nous avons préparé des Tables de sinus de telle sorte que les calculs puissent être exécutés immédiatement quand il sera nécessaire. Ajoutons que nous avons été précédé dans ce travail par M. Yvon Villarceau. Ce géomètre, au moyen de formules qui lui sont propres, a calculé, avec 12 décimales exactes, une suite de sinus du deuxième et du troisième ordre, formant ainsi un cadre pour des Tables plus étendues.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES NE CONTENANT QU'UNE VARIABLE INDÉPENDANTE.

Observation. — Avant de continuer l'exposition des méthodes d'intégration, nous devons indiquer l'ordre que nous allons suivre.

On sait, d'après ce qui précède, que l'intégration des équations linéaires à coefficients constants joue un rôle important dans les méthodes de Wronski. L'intégration des équations différentielles de cette

---

logarithme est celui de 100000, et les suivants ceux de 100125, 100205, etc., nombres qui s'obtiennent alors avec la plus grande facilité.

Dans le système de logarithmes à 7 décimales dont la base est 2, le canon a les dimensions de 305^{cm} sur 225^{cm} ; il est formé de deux Tableaux correspondant aux deux parties dont est composée la portion décimale d'un logarithme. Ce canon a une étendue triple de celle des Tables ordinaires, et l'addition des deux parties du logarithme demande moins de temps que celui que l'on met à feuilleter la Table. Un canon de logarithmes vulgaires contient une partie de plus.

espèce, dans le cas d'une seule variable indépendante, est assez connue pour que n'ayons eu besoin que d'en rappeler les formules; mais pour les autres équations, les solutions, quoique données depuis longtemps, ne se trouvant pas dans les Ouvrages classiques, nous serons obligé de les traiter d'une façon particulière et même plus complète qu'on ne l'a fait jusqu'ici. D'un autre côté, nous ne pourrions, sans perdre de vue la méthode de Wronski, donner de suite tout ce qui concerne l'intégration des équations linéaires à coefficients constants, c'est pourquoi nous ne présenterons ici que ce qui est absolument nécessaire à la méthode, en indiquant toutefois comment on pourrait vérifier ou démontrer certaines formules dont il sera fait usage.

Désirant pousser les calculs jusqu'au point où il ne reste plus qu'à effectuer des opérations indiquées bien explicitement, nous entrerons de suite dans le détail des transformations relatives aux racines des équations caractéristiques. Nous avons reconnu que, en général, la transformation doit être faite au moyen de fonctions symétriques, et que les transformations faites au moyen de sinus d'ordre quelconque, ou même par d'autres procédés, ne sont que des transformations particulières; nous avons étudié le système complet de ces transformations et nous donnons ici, outre les formules d'intégration par les fonctions symétriques, la formule d'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants, au moyen de sinus d'ordres supérieurs. Quant aux fonctions symétriques, nous n'avons fait que compléter et étendre le moyen indiqué par Wronski dans sa *Critique des fonctions génératrices*, ce géomètre s'étant lui-même visiblement inspiré des travaux de Laplace. Néanmoins, nous sommes convaincu que Wronski avait achevé les calculs que nous avons dû rétablir nous-même.

Nous réservons pour une Note spéciale, qui paraîtra dès que le sujet présent sera achevé, les questions que nous ne pouvons à présent traiter d'une manière suffisante. Cette Note comprendra des notions sur les agrégats et sur leur emploi; ces sommes seront pour nous d'un usage aussi fréquent que celui des déterminants. Nous donnerons les formules de différentiation de fonctions de plusieurs variables, puis nous reviendrons sur l'intégration des équations linéaires à coefficients constants, et nous reprendrons, pour ce qu'il nous importe de con-

naître, la théorie des fonctions symétriques pour en faire l'application aux sinus des ordres supérieurs.

L'étude de ces questions découle tout naturellement de la loi suprême de Wronski; d'après cela, nous aurions dû commencer par son exposition, mais les sujets que nous traiterons auparavant formeront une introduction très utile pour l'intelligence complète de cette loi remarquable. Nous pouvons dire qu'elle a été l'objet de notre première étude; c'est ce qui nous a permis d'entreprendre avec fruit le rétablissement des diverses méthodes d'intégration sur lesquelles Wronski ne nous a laissé que de simples indications.

Équations aux différences finies. — Considérons une équation qui contient une fonction inconnue y d'une variable indépendante x, ainsi que les différences des quantités x et y ne dépassant pas l'ordre μ; soit

$$\varphi(y) = 0$$

cette équation. Pour effectuer l'intégration, il faut trouver une expression de la fonction inconnue y qui rende identique l'équation proposée.

Nous avons vu que l'expression (22) ([1]) remplit cette condition, et qu'il est même nécessaire de lui substituer l'expression plus générale (22), savoir :

$$F(y) = F(\varpi) - \varphi(\varpi)\frac{\left(\frac{dF(\varpi)}{dx}\right)}{\left(\frac{d\varphi(\varpi)}{dx}\right)}$$
$$+ \frac{1}{2}[\varphi(\varpi)]^2 \frac{\left(\frac{d\varphi(\varpi)}{dx}\right)\left(\frac{d^2F(\varpi)}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^2\varphi(\varpi)}{dx^2}\right)\left(\frac{dF(\varpi)}{dx}\right)}{\left(\frac{d\varphi(\varpi)}{dx}\right)^3} - \ldots.$$

ϖ est ici une fonction arbitraire, qui néanmoins doit se rapprocher le plus possible de la fonction inconnue y, et $F(y)$ est une fonction quelconque mais donnée de y; cette fonction peut être une différence ou une dérivée de la quantité cherchée.

([1]) *Voir* le n° de janvier 1882.

Sans reprendre les considérations que nous avons présentées à propos des équations différentielles, considérations qui se reproduisent ici, nous rappellerons que l'on doit former au moyen de l'équation donnée, en y introduisant une quantité arbitraire ω, une équation transformée

$$\varphi(y, \omega) = 0;$$

de la sorte, pour $\omega = 1$, on reproduit l'équation proposée, qui se trouve ainsi écrite :

$$\varphi(y, 1) = 0,$$

et pour $\omega = 0$, on obtient l'équation réduite

$$\varphi(y, 0) = 0.$$

Cette équation donne une première valeur de l'inconnue que nous avons désignée sous le nom de *valeur fondamentale* et que nous avons dénotée par ϖ.

L'équation réduite peut toujours être une équation aux différences finies à coefficients constants intégrable par des moyens connus : la valeur fondamentale ainsi obtenue conduit à l'intégrale générale de l'équation proposée; il est clair que l'on peut former autrement l'équation réduite.

Calcul de l'inconnue. — Il reste maintenant à donner le détail des calculs que nous venons d'indiquer. Pour cela, mettons l'équation proposée, par hypothèse d'ordre μ, sous la forme

$$(28) \qquad \Delta^{\mu} y \mathrm{H}_{\mu} + \Delta^{\mu-1} y \mathrm{H}_{\mu-1} + \ldots + \Delta y \mathrm{H}_1 + y \mathrm{H}_0 = \psi(x);$$

$\psi(x)$ est une fonction donnée de x, et les coefficients $\mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_{\mu}$ peuvent être des fonctions de x de l'inconnue y et de leurs différences de divers ordres, jusqu'à l'ordre μ inclusivement. Il est évident que l'équation proposée peut toujours être mise sous cette forme et même

être écrite de la manière suivante,

$$(28)' \qquad \Sigma_\mu \Delta^\sigma y \, H_\sigma - \psi(x) = 0 \quad (^1),$$

en convenant de faire varier l'indice σ de zéro à μ.

Considérons les variations de l'inconnue y, ou même de $F(y)$, correspondant à des valeurs de la variable x, comprises entre deux limites quelconques déterminées p et q; soit α la valeur de x correspondant à une valeur moyenne β de y dans les limites considérées (nous avons déjà précisé le sens que Wronski attache à cette expression de valeurs moyennes), et supposons ces deux valeurs α et β provisoirement connues. Si nous remplaçons dans le coefficient général H_σ les quantités x, y et leurs différences par leurs valeurs moyennes, nous obtiendrons une quantité h_σ qui sera le coefficient général de l'équation réduite; nous pouvons alors introduire la quantité arbitraire ω de manière à obtenir l'équation transformée

$$(29) \qquad \Sigma_\mu \Delta^\sigma y \, h_\sigma \left(\frac{H_\sigma}{h_\sigma}\right)^\omega - \psi(x) = 0.$$

Pour $\omega = 1$, cette équation donne l'équation proposée (28)', et pour $\omega = 0$ elle donne l'équation réduite

$$(30) \qquad \Sigma_\mu \Delta^\sigma w \, h_\sigma - \psi(x) = 0,$$

en changeant y en w d'après les notations adoptées. Maintenant, si nous désignons par $m_1, m_2, \ldots, m_\mu$ les μ racines de l'équation caractéristique

$$(31) \qquad h_\mu m^\mu + h_{\mu-1} m^{\mu-1} + \ldots + h_0 = 0,$$

comme on le sait, on a pour la valeur fondamentale, en dénotant par u

(1) Nous avons fait plus haut usage d'une notation différente pour indiquer la manière dont les termes varient dans la somme Σ; à l'avenir, nous nous conformerons à la notation de Wronski; l'indice joint à la lettre Σ indique la limite supérieure de l'indice variable σ.

la différence Δx,

$$(32) \qquad w = \Sigma_\mu (1 + m_\sigma)^{\frac{x}{u}} \left[M_\sigma + N_\sigma \Sigma \psi(x) \left(\frac{1}{1 + m_\sigma} \right)^{\frac{x}{u}} \right];$$

N_σ a pour valeur

$$(32)' \; N_\sigma = \frac{1}{h_\mu (1 + m_\sigma)(m_\sigma - m_1)(m_\sigma - m_2)\ldots(m_\sigma - m_{\sigma-1})(m_\sigma - m_{\sigma+1})\ldots(m_\sigma - m_\mu)}.$$

M_σ est l'une des μ constantes arbitraires, et la somme entre crochets est une somme indéfinie prise par rapport à l'accroissement u, tandis que la somme Σ_μ se compose de μ termes en faisant varier l'indice σ de 1 à μ.

On peut, dans certains cas, trouver utile d'introduire une fonction arbitraire dans l'équation transformée, ainsi que nous l'avons déjà fait dans le cas des équations différentielles; la plus simple de ces fonctions est

$$s(1 + r)^{\frac{u}{x}},$$

s et r étant deux constantes à déterminer, de sorte que l'équation transformée sera

$$(33) \qquad \sum_\mu \Delta^\sigma y h_\sigma \left(\frac{H_\sigma}{h_\sigma} \right)^\omega - \psi(x) = (1 - \omega) s (1 + r)^{\frac{x}{u}} = 0,$$

et l'équation réduite devient

$$(34) \qquad \sum_\mu \Delta^\sigma w h_\sigma - \psi(x) - s(1 + r)^{\frac{x}{u}} = 0.$$

De cette manière, en supposant nulle la fonction $\psi(x)$ et en négligeant les constantes, on a

$$(35) \quad w = \sum_\mu s(1 + m_\sigma)^{\frac{x}{u}} N_\sigma \sum \left(\frac{1 + r}{1 + m_\sigma} \right)^u = s(1 + r)^{\frac{x}{u}} \sum_\mu N_\sigma \frac{1 + m_\sigma}{m_\sigma - r}.$$

Afin de pouvoir appliquer maintenant la formule (22), il reste à cal-

culer les différences et les dérivées de l'expression (32); on aura

$$(36)\qquad \Delta^{\varpi} w = \sum_{\mu} (1 + m_\sigma)^{\frac{x}{u}} \left[m_\sigma^{\varpi} \mathrm{M}_\sigma + \mathrm{N}_\sigma \sum \Delta^{\varpi} \psi(x) \left(\frac{1}{1 + m_\sigma} \right)^{\frac{x}{u}} \right],$$

puis

$$(36)'\qquad \frac{d^\nu w}{dx^\nu} = \sum_{\mu} (1 + m_\sigma)^{\frac{x}{u}} \left[\frac{\mathrm{L}^\nu (1 + m_\sigma)}{u^\nu} \mathrm{M}_\sigma + \mathrm{N}_\sigma \sum \frac{d^\nu \psi(x)}{dx^\nu} \left(\frac{1}{1 + m_\sigma} \right)^{\frac{x}{u}} \right],$$

et enfin

$$(36)''\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^\nu \Delta^{\varpi} w}{dx^\nu} &= \sum_{\mu} (1 + m_\sigma)^{\frac{x}{u}} \\ &\times \left[\frac{\mathrm{L}^\nu (1 + m_\sigma)}{u^\nu} m_\sigma^{\varpi} \mathrm{M}_\sigma + \mathrm{N}_\sigma \sum \frac{d^\nu \Delta^{\varpi} \psi(x)}{dx^\nu} \left(\frac{1}{1 + m_\sigma} \right)^{\frac{x}{u}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Ces formules ne peuvent être utilisées que si toutes les racines de l'équation caractéristique sont réelles, car autrement, s'il existe des racines imaginaires, il se trouvera dans les expressions précédentes des parties imaginaires qu'il faudra grouper convenablement afin d'obtenir des valeurs réelles de w. Ces transformations, bien connues dans le cas d'équations différentielles, le sont moins quand il s'agit d'équations contenant des différences: aussi nous allons les reprendre rapidement.

Transformations relatives aux quantités imaginaires. — Le principe qui va nous servir de point de départ consiste à substituer dans l'expression fondamentale (32), aux racines de l'équation caractéristique, des fonctions symétriques de ces racines; cette manière d'opérer aura l'avantage d'éviter la résolution d'une équation algébrique.

Posons

$$(37)\qquad n = 1 + m \quad \text{et} \quad \frac{x}{u} = \zeta,$$

l'équation caractéristique sera remplacée par l'équation suivante, dont les racines sont m_1, m_2, ..., augmentées de l'unité,

$$(38)\qquad k_\mu n^\mu + k_{\mu-1} n^{\mu-1} + \ldots + k_0 = 0,$$

en faisant

$$(38)' \left\{ \begin{array}{l} h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + \ldots + (-1)^{\mu} h_{\mu} = k_0, \\ h_1 - 2h_2 + 3h_3 - \ldots + (-1)^{\mu-1} \frac{\mu}{1} h_{\mu} = k, \\ h_2 - 3h_3 + \ldots + (-1)^{\mu-2} \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} h_{\mu} = k_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ h_{\mu} = k_{\mu}. \end{array} \right.$$

Cette équation caractéristique (38) correspond à l'équation

$$(39) \quad k_{\mu} f(x + \mu u) + k_{\mu-1} f[x + (\mu - 1)u] + \ldots + k_0 f(x) = \psi(x),$$

si l'on pose

$$f(x) = \varpi.$$

Wronski, dans sa *Critique des fonctions génératrices,* part de cette équation pour effectuer l'intégration de toutes les équations linéaires à coefficients constants; l'équation (39) donne, si l'on appelle ϖ_1 la solution sans constantes arbitraires,

$$(40) \qquad \varpi_1 = \frac{(-1)^{\mu-1}}{N k_{\mu}} \sum_{\mu} (-1)^{\nu-1} N'_{\sigma} n_{\sigma}^{\zeta} \sum \psi(x) \left(\frac{1}{n_{\sigma}}\right)^{\zeta},$$

en faisant

$$(40)' \qquad N = \text{ⓦ}(n_1^1 n_2^2 \ldots n_{\mu}^{\mu}) = (-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{3}} \Pi(n_{\sigma}) \Pi(n_{\sigma} - n_{\nu});$$

Π indique le produit des quantités entre parenthèses, et l'ordre des indices ν est l'ordre numérique, comme nous l'avons déjà indiqué pour (32)'; de plus, N'_{σ} est un des déterminants mineurs de N ordonné par rapport aux puissances μ des racines, ce qui donne

$$(40)'' \qquad \frac{N'_{\sigma}}{N} = \frac{(-1)^{\mu-1}}{n_{\sigma}} \frac{(-1)^{\sigma-1}}{\Pi(n_{\sigma} - n_{\nu})}.$$

Si $\psi(x)$ est nul, la somme indéfinie pour une valeur particulière de σ

se réduit à une constante arbitraire; en ajoutant cette dernière solution à la solution (40), on retrouverait la solution (32).

L'expression (40) s'établit directement; on peut aussi vérifier facilement qu'elle satisfait à l'équation (39). Cette expression développée donne

$$w_1 = \frac{(-1)^{\mu-1}}{k_\mu} \sum \psi(x+\sigma u) \left[\frac{N'_1}{N} n_1^{-\sigma} + \frac{N'_2}{N} n_2^{-\sigma} + \ldots + (-1)^{\mu-1} \frac{N'_\mu}{N} n_\mu^{-\sigma} \right],$$

et comme, d'après un théorème que nous avons énoncé (14 janvier 1881) on a, pour p positif ou négatif,

$$(41) \qquad \aleph(p) = \frac{\mathfrak{D}(n_1^1 n_2^2 \ldots n_{\mu-1}^{\mu-1} n_\mu^{\mu+p})}{N},$$

il vient, en faisant $-\varsigma = +\mu - p$ et prenant ς et p négatifs,

$$(42) \qquad w_1 = \frac{1}{k_\mu} \sum \psi(x+\sigma u) \aleph(-\varsigma);$$

Σ est une somme indéfinie dans laquelle ς varie de zéro à $+\infty$, et les fonctions $\aleph$ sont ici des fonctions aleph négatives.

Il reste à tenir compte des constantes arbitraires, c'est-à-dire de l'expression

$$(43) \qquad w_2 = M_1 n_1^\zeta + M_2 n_2^\zeta + \ldots + M_\mu n_\mu^\zeta,$$

qui est aussi comprise dans l'expression (32). D'après l'origine des constantes, ainsi que nous venons de le dire et d'après leurs valeurs arbitraires, nous devons écrire le second membre de (43) sous la forme

$$(44) \qquad \frac{N_1^{(\lambda)}}{N} n_1^\zeta + \frac{N_2^{(\lambda)}}{N} n_2^\zeta + \ldots + \frac{N_\mu^{(\lambda)}}{N} n_\mu^\zeta,$$

en désignant par N le déterminant de (40)', et par $N_1^{(\lambda)}$, $N_2^{(\lambda)}$, ... des fonctions de n_1, n_2, ..., n_μ telle que l'expression totale soit une fonction symétrique de ces quantités; de la sorte, si l'on représente par Z_λ l'expression (44) et par P_λ une nouvelle constante arbitraire,

$P_\lambda Z_\lambda$ est une valeur particulière de (43); par suite, $P_1, P_2, \ldots, P_\mu, Z_1, Z_2, \ldots, Z_\mu$ étant μ constantes et μ fonctions analogues à (44), on peut écrire (43) de la manière suivante :

(43)′ $$\varpi_2 = P_1 Z_1 + P_2 Z_2 + \ldots + P_\mu Z_\mu.$$

Il est évident que, si l'on pose

(45) $$n^\zeta = Z_1 + n Z_2 + n^2 Z_3 + \ldots + n^{\mu-1} Z_\mu,$$

en donnant à n successivement les μ valeurs qui satisfont à l'équation (38), on obtient μ équations linéaires, lesquelles, par leur résolution, donnent pour l'une des fonctions Z_λ,

(46) $$Z_\lambda = \frac{\mathfrak{D}(n_1^1 n_2^2 \ldots n_\lambda^{\zeta+1} \ldots n_\mu^\mu)}{N}.$$

Le second membre développé par rapport à $n_1^\zeta, n_2^\zeta, \ldots$ est bien de la forme (44), et les quantités Z sont, de cette manière, des fonctions symétriques des racines de (38). D'après un théorème sur les fonctions aleph, que nous démontrerons plus tard [le théorème (41) n'en est qu'un cas particulier], on a

(46)′ $$\left\{\begin{aligned} \frac{\mathfrak{D}(n_1^1 n_2^2 \ldots n_\lambda^{\zeta+1} \ldots n_\mu^\mu)}{N} k_\mu &= \aleph(\zeta - \mu + 1) k_\lambda \\ &+ \aleph(\zeta - \mu + 2) k_{\lambda+1} + \ldots + \aleph(\zeta - \lambda + 1) k_\mu. \end{aligned}\right.$$

N ayant toujours la valeur (40)′.

Donc, d'après (46) et (46)′, on peut écrire (43)′

$$\begin{aligned} \varpi_2 k_\mu = (P_1 k_1 + P_2 k_2 + \ldots + P_\mu k_\mu) \aleph(\zeta - \mu + 1) \\ + (P_1 k_2 + P_2 k_3 + \ldots + P_{\mu-1} k_\mu) \aleph(\zeta - \mu + 2) + \ldots + P_1 k_\mu \aleph(\zeta), \end{aligned}$$

ou, en représentant par $Q_1, Q_2, \ldots$ les nouvelles constantes, on a

(47) $$\varpi_2 k_\mu = Q_1 \aleph(\zeta - \mu + 1) + Q_2 \aleph(\zeta - \mu + 2) + \ldots + Q_\mu \aleph(\zeta);$$

par suite, la solution complète de l'équation linéaire à coefficients

constants (30) peut s'écrire, en réunissant les deux quantités w_1 et w_2, (42) et (47),

$$(48) \quad w = \frac{1}{k_\mu}\sum_\mu Q_\sigma \aleph\left(\frac{x}{u} - \mu + \sigma\right) + \frac{1}{k_\mu}\sum \psi(x+\sigma u)\,\aleph(-\varsigma).$$

La première somme se compose de μ termes, la seconde est une somme indéfinie, et l'expression entière ne contient que des fonctions symétriques des racines de l'équation (38), et par conséquent de l'équation caractéristique (31).

Nous sommes obligé de passer rapidement sur ce qui précède : une exposition complète exigerait des développements que nous réservons pour une Note spéciale. Nous ajouterons cependant quelques remarques.

Les transformations précédentes supposent essentiellement que les racines de l'équation caractéristique soient toutes différentes; il faudrait modifier ces transformations dans le cas des racines égales.

Les propositions (41) et (46) peuvent se démontrer de plusieurs manières; la première peut être considérée comme un corollaire de la relation $(de)''$ que Wronski donne dans l'*Introduction à la philosophie des Mathématiques,* p. 144; (46) peut aussi s'en déduire. Quant au calcul des fonctions $\aleph$, Wronski donne le moyen de les calculer dans le Tome III de la *Réforme,* p. 28 à 31; nous indiquerons les diverses formes que l'on peut donner aux expressions de ces fonctions. Pour l'instant, il suffit d'indiquer les suivantes; on a la relation générale des fonctions $\aleph$ positives ou négatives, c'est-à-dire quel que soit le nombre entier p, en considérant les racines d'une équation algébrique; (31) par exemple, est

$$(49) \quad h_\mu \aleph(p) + h_{\mu-1}\aleph(p-1) + h_{\mu-2}\aleph(p-2) + \ldots + h_0\aleph(p-\mu) = 0;$$

de plus, en se reportant à la relation (41), on trouve les valeurs particulières

$$(49)' \quad \aleph(0) = 1, \quad \aleph(-1) = 0, \quad \aleph(-2) = 0, \quad \ldots, \quad \aleph(-\mu+1) = 0;$$

la relation (49) permet donc de calculer une fonction quelconque $\aleph(p)$ ou $\aleph(-p)$, en tenant compte des valeurs particulières (49)'.

Les transformations que nous venons de donner s'appliquent directement aux équations aux différences ou aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants, comme nous le montrerons; on pourrait aussi les appliquer aux équations différentielles ordinaires, au lieu d'employer des sinus pour faire disparaître les imaginaires, selon l'usage.

Il est inutile de donner ici ces formules : on ne trouverait aucun intérêt à les employer, car, les transformations par les fonctions symétriques devant nécessairement conduire à des fonctions transcendantes, on ne pourrait obtenir que des expressions sans forme indéfinie, tandis que les sinus dont on possède des tables peuvent toujours être utilisés et facilitent considérablement les calculs.

Dans le cas d'équations qui contiennent des différences, équations linéaires à coefficients constants, on pourrait encore grouper deux à deux les racines imaginaires de l'équation caractéristique, au lieu de faire usage de l'expression (48); mais ici l'avantage que nous venons de signaler pour les sinus n'existe plus; néanmoins, suivant les cas, il faudra choisir entre le groupement des racines et la transformation précédente.

Au reste, le groupement des racines imaginaires deux à deux n'est qu'un groupement particulier; M. Yvon Villarceau a montré, dans le cas d'équations différentielles, comment devaient intervenir les sinus des ordres supérieurs dans le groupement d'un nombre quelconque de racines. Depuis la publication du Mémoire de ce géomètre, bien que des travaux aient été faits sur la question, nous n'avons pas connaissance que l'on ait donné la solution générale de ce problème; pour cette raison, nous croyons pouvoir l'indiquer ici. A cet effet, les racines de l'équation caractéristique (17) doivent être mises sous la forme

$$(50)\qquad m = a_0 + a_1\rho + a_1\rho^2 + \ldots + a_{\mu-1}\rho^{\mu-1},$$

ρ étant l'une des racines $\mu^{\text{ièmes}}$ de l'unité positive, et a_0, a_1, $\ldots$, $a_{\mu-1}$, μ quantités qui sont les mêmes pour les μ racines de la caractéristique. On sait former ces quantités a pour l'équation du troisième degré, et Wronski a donné leur formation pour les degrés supérieurs; ces quan-

tités sont toutes réelles, quand les μ racines sont imaginaires. Pour transformer l'expression $(17)'$, il suffit maintenant d'introduire les expressions de chacune des racines sous la forme (50) dans les déterminants, $N, N_1, N_2, \ldots$. Sans tenir compte des constantes arbitraires, $(17)'$ est

$$(51) \qquad \varpi_1 = \frac{(-1)^{\mu-1}}{h_\mu N} \sum_\mu (-1)^{\sigma-1} N_\sigma e^{m_\sigma x} \int \psi(x) e^{-m_\sigma x} dx.$$

Cette somme est composée de μ termes; elle s'obtient en faisant varier l'indice σ de 1 à μ. Les déterminants $N, N_1, N_2, \ldots$ sont formés comme ceux de $(40)'$ et $(40)''$, au produit près des racines.

En effectuant les calculs, on trouve

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} \varpi_1 = {} & \frac{(-1)^{\mu-1} e^{a_0 x}}{h_\mu \mathfrak{D}\left[B_1^{(1)} B_2^{(2)} \ldots B_{\mu-1}^{(\mu-1)}\right]} \\ & \times \sum_\mu \Big\{ (-1)^\sigma \mathfrak{D}\left[B_{\sigma_1}^{(1)} \ldots B_{\sigma(\mu-2)}^{(\mu-2)}\right] \\ & \qquad \times \sum_\tau \left[(-1)^t A_\tau \int \psi(x) e^{-a_0 x} A'_{\tau'} dx \right] \Big\}. \end{aligned} \right.$$

Σ_σ est la somme de tous les termes qui diffèrent par la valeur de σ, σ variant de 1 à $\mu - 1$, et Σ_τ est la somme de tous ceux qui diffèrent par la valeur de τ, τ variant de zéro à $\mu - 1$; les indices τ et τ' sont liés par la condition

$$(52)' \qquad \tau + \tau' = t\mu - \sigma,$$

équation indéterminée qu'il faut résoudre en nombres entiers positifs. De plus, on a

$$(53) \qquad A_\tau = A_{gr}\left[(-1)^{q\mu} S_p\, a_1 x\, S_{p_2} a_2 x \ldots S_{p(\mu-1)} a_{\mu-1} x\right],,$$

avec la condition

$$(53)' \qquad 1p_1 + 2p_2 + \ldots + (\mu - 1)p_{\mu-1} = q\mu + \tau;$$

q est un nombre entier, et les indices $p_1, p_2, \ldots$ peuvent être ensemble ou séparément 0, 1, 2, ..., $(\mu - 1)$; S_p est le $p^{\text{ième}}$ sinus d'ordre

$(\mu - 1)$ [1]; d'après cette notation, S_0 ou S_μ représente le cosinus, et dans le cas présent les sinus sont du genre elliptique quand l'indice de a, dont ils sont fonctions, est impair, et du genre hyperbolique quand cet indice est pair. Les quantités A′ sont les mêmes que les quantités A, sauf qu'il faut y changer le signe de x. Nous avons déjà indiqué la formation des agrégats; nous ne nous y arrêtons pas. Enfin on a encore

$$(54)\qquad B_\sigma^{(\lambda)} = 1^{\lambda|1} A_{gr} \left[(-1)^{q\mu} \frac{a_0^{p_0} \cdot a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \ldots a_{\mu-1}^{p_{\mu-1}}}{1^{p_0|1} 1^{p_1|1} 1^{p_2|1} \ldots 1^{p_{\mu-1}|1}} \right],$$

les indices p devant satisfaire en nombres entiers positifs aux conditions

$$(54)'\qquad \begin{cases} p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_{\mu-1} = \lambda, \\ 1 p_1 + 2 p_2 + \ldots + (\mu - 1) p_{\mu-1} = q\mu + \sigma. \end{cases}$$

Si la fonction $\psi(x)$ est nulle, l'expression (52) devient

$$(55)\qquad \varpi_2 = \Sigma_\mu (A_\tau M_\tau),$$

M_τ étant une des μ constantes arbitraires, et τ variant de 1 à μ.

Ces expressions ne sont, en réalité, que l'indication des calculs à effectuer; on peut facilement le vérifier sur l'équation du troisième degré. Soit ainsi $\mu = 3$; on a

$$\mathcal{G}[B_1^{(1)} B_2^{(2)}] = a_1(a_1^2 + 2a_0 a_2) - a_2(-a_2^2 + 2a_0 a_1);$$

pour $\sigma = 1$,

$$\mathcal{G}[B_2^{(1)}] = a_2;$$

pour $\sigma = 2$,

$$\mathcal{G}[B_1^{(1)}] = a_1$$

---

(1) Nous aurions voulu conserver la notation des sinus adoptée par M. Yvon Villarceau, mais Wronski ayant en partie fait usage de la même notation pour représenter d'autres fonctions, nous avons cru devoir désigner les sinus par la lettre majuscule S, avec un indice convenable. Nous représentons ensuite les sinus du genre elliptique par la lettre de ronde $\mathcal{S}$, et les sinus du genre hyperbolique par la lettre gothique $\mathfrak{S}$. Les cosinus sont alors S_0, $\mathcal{S}_0$, $\mathfrak{S}_0$ ou S_μ, $\mathcal{S}_\mu$, $\mathfrak{S}_\mu$, ou encore C, $\mathcal{C}$, $\mathfrak{C}$, quand il devient nécessaire de les distinguer des sinus.

La relation $(52)'$ donne

$$1^{\text{o}} \qquad \sigma = 1 \begin{cases} \tau = 0, & \tau' = 1, & t = 0, \\ \tau = 1, & \tau' = 0, & t = 0, \\ \tau = 2, & \tau' = 2, & t = 1; \end{cases}$$

$$2^{\text{o}} \qquad \sigma = 2 \begin{cases} \tau = 0, & \tau' = 2, & t = 0, \\ \tau = 1, & \tau' = 1, & t = 0, \\ \tau = 2, & \tau' = 0, & t = 0. \end{cases}$$

Enfin, pour les divers indices τ, (53) donne

$$\begin{aligned} A_0 &= \mathbb{S}_0 a_1 x \mathfrak{S}_0 a_2 x + \mathbb{S}_1 a_1 x \mathfrak{S}_1 a_2 x + \mathbb{S}_2 a_1 x \mathfrak{S}_2 a_2 x, \\ A_1 &= \mathbb{S}_0 a_1 x \mathfrak{S}_2 a_2 x + \mathbb{S}_1 a_1 x \mathfrak{S}_0 a_2 x + \mathbb{S}_2 a_1 x \mathfrak{S}_1 a_2 x, \\ A_2 &= \mathbb{S}_0 a_1 x \mathfrak{S}_1 a_2 x + \mathbb{S}_1 a_1 x \mathfrak{S}_2 a_2 x + \mathbb{S}_2 a_1 x \mathfrak{S}_0 a_2 x; \end{aligned}$$

pour l'indice τ', il faut changer x en $-x$; d'après la remarque que nous avons faite, le premier sinus dans chaque terme est du genre elliptique et le second est du genre hyperbolique. Le reste du calcul s'achèverait sans difficulté.

Les calculs à effectuer directement comme vérification, dans le cas de l'équation du troisième degré, sont identiques à ceux qui conduisent à l'expression (52); pour cette raison, il est inutile d'insister davantage : ils se réduisent en définitive à des transformations de déterminants. Disons cependant que ces calculs portent en partie sur des fonctions symétriques des racines de l'unité, de la forme

$$\sum \rho_1^{\alpha} \rho_2^{\beta} \rho_3^{\gamma} \cdots$$

Ces fonctions se rencontrent constamment quand on veut établir la théorie des sinus d'un ordre μ : aussi avons-nous déterminé l'expression générale de ces fonctions; néanmoins elle n'est pas indispensable ici. Cette expression, insérée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, n° 22, du 30 mai 1881, peut être obtenue de plusieurs manières; nous sommes même parvenu à l'expression de la

fonction symétrique plus générale dans laquelle $\rho_1, \rho_2, \ldots$ représentent les racines d'une équation algébrique quelconque. On n'ignore pas que les géomètres, depuis plus d'un siècle, ont inutilement cherché la solution de ce problème, et qu'ils ont dû alors se borner à calculer des tables de coefficients. Nous pourrons donner plus tard cette solution à titre de curiosité, car l'énoncé du problème dont il s'agit n'est pas conforme au véritable objet de la théorie des fonctions symétriques; par cette solution, on aura une fois de plus la preuve que les principes de Wronski permettent de résoudre les questions réputées les plus difficiles.

Pour en revenir à l'expression (48), il nous reste à calculer ses différences et ses dérivées par rapport à la variable x. Il suffit, dans les termes qui dépendent de $\psi(x)$, de remplacer cette fonction par la différence $\Delta^\nu\psi(x)$ que l'on considère; il en serait de même de la dérivée. Dans les termes indépendants de $\psi(x)$, comme on a

$$\Delta n^\zeta = n^\zeta(n-1),$$

on voit que chaque terme donne lieu à deux nouveaux termes; pour la seconde différence on aurait trois termes, et ainsi de suite, tous ces termes provenant du développement des puissances de $n-1$. Enfin, pour les dérivées, comme on rencontre le logarithme de n, on aurait une suite illimitée de termes de même espèce que les précédents. Il convient donc d'après cela, pour avoir une certaine uniformité dans les expressions que nous voulons obtenir, de transformer les fonctions $\aleph$, qui sont formées avec les coefficients k de l'équation (38), en fonctions $\aleph$ formées avec les coefficients h de l'équation (31).

On a, en remplaçant n par $1+m$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathfrak{D}(n_1^1\ldots n_\mu^{-\sigma})}{\mathrm{N}} &= \frac{\mathfrak{D}(m_1^1\ldots m_\mu^{-\sigma})}{\mathrm{N}'} - \frac{\sigma}{1}\,\frac{\mathfrak{D}(m_1^1\ldots m_\mu^{-\sigma-1})}{\mathrm{N}'} \\ &\quad + \frac{\sigma(\sigma+1)}{1.2}\,\frac{\mathfrak{D}(m_1^1\ldots m_\mu^{-\sigma-2})}{\mathrm{N}'} - \ldots \\ &= \sum(-1)^\nu\,\frac{\sigma^{\nu|1}}{1^{\nu|1}}\,\frac{\mathfrak{D}(m_1^1\ldots m_\mu^{-\sigma-\nu})}{\mathrm{N}'}.\end{aligned}$$

Cette somme indéfinie a ses termes formés au moyen de l'indice ν, qui varie de zéro à $+\infty$, et N' est le déterminant N dans lequel n est remplacé par m.

L'expression (42) donne ainsi, en faisant $-\varsigma = -\mu - \sigma$,

$$(56) \qquad \varpi_1 = \frac{1}{h_\mu} \sum_\mu \left[\psi(x + \sigma u) \sum (-1)^\nu \frac{\sigma^{\nu|1}}{1^{\nu|1}} \aleph(-\varsigma - \nu) \right].$$

Passons à la seconde expression; on a, pour la fonction Z_λ ou son équivalent, en vertu de (46),

$$\frac{\mathfrak{D}(n_1^1 \ldots n_\lambda^{\zeta+1} \ldots n_\mu^\mu)}{N} = \frac{\zeta^{\lambda-1|-1}}{1^{\lambda-1|1}} + \frac{\zeta^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}} \frac{\mathfrak{D}(m_1^1 \ldots m_\lambda^{\mu+1} \ldots m_\mu^\mu)}{N'} + \frac{\zeta^{\mu+1|-1}}{1^{\mu+1|1}}$$
$$\times \frac{\mathfrak{D}(m_1^1 \ldots m_\lambda^{\mu+2} \ldots m_\mu^\mu)}{N'} + \ldots + \frac{\mathfrak{D}(m_1^1 \ldots m_\lambda^{\zeta+1} \ldots m_\mu^\mu)}{N'}.$$

Maintenant, en formant les quantités $P_1 Z_1$, $P_2 Z_2$, ... et faisant leur somme, puis remplaçant les rapports de déterminants par les fonctions $\aleph$, d'après (46)' (en tenant compte toutefois de ce que les coefficients k doivent être remplacés par les coefficients h, puisque l'on substitue les racines m aux racines n), on trouve

$$\left(P_1 + P_2 \frac{\zeta}{1} + P_3 \frac{\zeta(\zeta-1)}{1.2} + \ldots + P_\mu \frac{\zeta^{\mu-1|-1}}{1^{\mu-1|1}}\right) \aleph(0)$$
$$+ \frac{\zeta^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}} (P_1 h_1 + P_2 h_2 + \ldots + P_\mu h_\mu) \aleph(1)$$
$$+ \left[\frac{\zeta^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}} (P_1 h_2 + P_2 h_3 + \ldots + P_{\mu-1} h_\mu) + \frac{\zeta^{\mu+1|-1}}{1^{\mu+1|1}} P_1 h_1 + \ldots + P_\mu h_\mu)\right] \aleph(2) + \ldots$$
$$+ \left[\frac{\zeta^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}} P_1 h_\mu + \frac{\zeta^{\mu+1|-1}}{1^{\mu+1|1}} (P_1 h_{\mu-1} + P_2 h_\mu) + \cdots + \frac{\zeta^{2\mu-1|-1}}{1^{2\mu-1|1}} (P_1 h_1 + \cdots + P_\mu h_\mu)\right] \aleph(\mu) + \cdots$$
$$+ \frac{\zeta^{\zeta|-1}}{1^{\zeta|1}} P_1 h_\mu \aleph(\zeta).$$

Faisons, pour abréger,

$$(57) \qquad \left\{ \begin{array}{l} Q_1 = P_1 h_1 + P_2 h_2 + \ldots + P_\mu h_\mu, \\ Q_2 = P_1 h_2 + P_2 h_3 + \ldots + P_{\mu-1} h_\mu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_\mu = P_1 h_\mu, \end{array} \right.$$

l'expression précédente devient

$$\left(P_1 + \ldots + P_\mu \frac{\zeta^{\mu-1|-1}}{1^{\mu-1|1}}\right)\aleph(0) + \frac{\zeta^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}} Q_1 \aleph(1)$$
$$+ \left(\frac{\zeta^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}} Q_2 + \frac{\zeta^{\mu+1|-1}}{1^{\mu+1|1}} Q_1\right)\aleph(2) + \ldots + \frac{\zeta^{\zeta|-1}}{1^{\zeta|1}} Q_\mu \aleph(\zeta).$$

Faisons encore, pour abréger,

$$(58) \quad \begin{cases} R_\sigma = \dfrac{\zeta^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}} Q_\sigma + \dfrac{\zeta^{\mu+1|-1}}{1^{\mu+1|1}} Q_{\sigma-1} + \ldots + \dfrac{\zeta^{\mu+\sigma-1|-1}}{1^{\mu+\sigma-1|1}} Q_1, \\ R_0 = P_1 + P_2 \dfrac{\zeta}{1} + P_3 \dfrac{\zeta^{2|-1}}{1^{2|1}} + \ldots + P_\mu \dfrac{\zeta^{\mu-1|-1}}{1^{\mu-1|1}}; \end{cases}$$

on a définitivement

$$(59) \qquad w_2 = \frac{1}{h_\mu} \Sigma_\zeta R_\sigma \aleph(\sigma).$$

Σ est ici une intégrale définie dont les limites sont zéro et ζ.

L'expression (59) est générale, car si l'indice de Q, dans (58), est plus grand que μ, ce coefficient est nul d'après (57); quant à la factorielle $\zeta^{p|-1}$, elle est nulle si $p > \zeta$, car elle contient le facteur $(\zeta - \zeta)$, c'est-à-dire zéro. Si $\zeta < \mu$, la valeur de w_2 se réduit à R_0, à cause des factorielles qui sont nulles; si ζ est négatif, l'intégrale est évidemment indéfinie, puisque le développement de $(1 + m)^\zeta$, qui était limité pour ζ positif, devient indéfini pour ζ négatif.

D'après ce qui précède, on passe facilement aux différences de w_2. En effet, la différence de n^ζ est $m.n^\zeta$; par suite, l'expression de ΔZ_λ est

$$\frac{\mathfrak{D}\left[n_1^1 \ldots n_{\lambda-1}^{\lambda-1}(m_\lambda n_\lambda^{\zeta+1}) n_{\lambda+1}^{\lambda+1} \ldots n_\mu^\mu\right]}{N}$$
$$= \frac{\zeta^{\lambda-2|-1}}{1^{\lambda-2|1}} + \frac{\zeta^{\mu-1|-1}}{1^{\mu-1|1}} \frac{\mathfrak{D}(m_1^1 \ldots m_\lambda^{\mu+1} \ldots m_\mu^\mu)}{N'} + \ldots + \frac{\mathfrak{D}(m_1^1 \ldots m_\lambda^{\zeta+2} \ldots m_\mu^\mu)}{N'}.$$

En achevant le calcul comme plus haut, on trouverait

$$R'_\sigma = \frac{\zeta^{\mu-1|-1}}{1^{\mu-1|1}} Q_\sigma + \ldots + \frac{\zeta^{\mu+\sigma-2|-1}}{1^{\mu+\sigma-2|1}} Q_1,$$

$$R'_0 = P_2 + P_3 \frac{\zeta}{1} + \ldots + P_\mu \frac{\zeta^{\mu-2|-1}}{1^{\mu-2|1}},$$

et par suite

$$\Delta \varpi_2 = \frac{1}{h_\mu} \Sigma_{\zeta+1} R'_0 \aleph(\sigma);$$

l'intégrale a pour limites zéro et $\zeta + 1$ pour les valeurs positives des ζ, elle est indéfinie pour les valeurs négatives de la variable.

En continuant de la même manière, on aurait

$$(60) \quad \begin{cases} R_\sigma^{(\nu)} = Q_\sigma^{(\nu)} + \frac{\zeta}{1} Q_{\sigma-1}^{(\nu)} + \ldots + \frac{\zeta^{\sigma-1|-1}}{1^{\sigma-1|1}} Q_1^{(\nu)} \\ R_0^{(\nu)} = P_{\nu+1} + P_{\nu+2}\zeta + \ldots + P_\mu \frac{\zeta^{\mu-1-\nu|-1}}{1^{\mu-1-\nu|1}}, \end{cases}$$

et la différence est

$$(61) \quad \Delta^\nu \varpi_2 = \frac{1}{h_\mu} \Sigma_{\zeta+\nu} R_\sigma^{(\nu)} \aleph(\sigma),$$

l'intégrale s'étendant de zéro à $\zeta + \nu$, pour les valeurs positives de ζ, ou pouvant être regardée comme indéfinie pour les valeurs négatives de cette variable.

L'expression des coefficients R est générale, par la raison que nous avons donnée plus haut.

Cette formule (61) permet de passer à l'expression des dérivées. En effet, on a $\frac{1}{u} n^\zeta \mathrm{L}n$, pour la dérivée de n^ζ; en développant donc le logarithme, il vient

$$\mathrm{L}n = m - \tfrac{1}{2}m^2 + \tfrac{1}{3}m^3 - \ldots,$$

et l'on retombe, par suite, sur des transformations identiques aux précédentes; il en résulte

$$(62) \quad \frac{d\varpi_2}{dx} = \frac{1}{u}\left(\Delta\varpi_2 - \frac{1}{2}\Delta^2\varpi_2 + \frac{1}{3}\Delta^3\varpi_2 - \ldots\right).$$

Les autres dérivées dépendent du développement des puissances du logarithme; Wronski a donné des formules permettant d'obtenir les puissances des polynômes quel que soit le nombre de leurs termes. Il est inutile d'insister davantage sur ces transformations, dont on doit avoir saisi l'esprit.

Suite du calcul de l'inconnue. Détermination des constantes. — Revenons à la question principale. Au moyen des expressions (35) à (36)″, ou des mêmes expressions transformées comme nous venons de le faire, il est facile de calculer les divers coefficients H de la fonction $\varphi(y)$; désignant par un accent les valeurs particulières que prennent ces coefficients quand on remplace y par w, on obtient

$$(63)\quad \begin{cases} \varphi(w) = \sum_\mu \Delta^\sigma w H'_\sigma - \psi(x), \\ \left(\dfrac{d\varphi(w)}{dx}\right) = \sum_\mu \dfrac{d\Delta^\sigma w}{dx} H'_\sigma + \sum_\mu \Delta^\sigma w \left(\dfrac{d^2 H'_\sigma}{dx}\right), \\ \left(\dfrac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right) = \sum_\mu \dfrac{d^2\Delta^\sigma w}{dx^2} H'_\sigma + 2\sum_\mu \dfrac{d\Delta^\sigma w}{dx}\left(\dfrac{dH'_\sigma}{dx}\right) + \sum_\mu \Delta^\sigma w \left(\dfrac{d^2 H'_\sigma}{dx^2}\right), \end{cases}$$

et ainsi de suite. On doit se rappeler que les dérivées entre parenthèses ne sont prises que sur les fonctions de w seulement. Si l'on tient compte des dérivées totales de $\varphi(w)$, comme nous l'avons déjà fait dans le cas des équations différentielles, les dérivées précédentes deviennent

$$(63)'\quad \begin{cases} \left(\dfrac{d\varphi(w)}{dx}\right) = \sum_\mu \Delta^\sigma w \left[\left(\dfrac{dH'_\sigma}{dx}\right) - \dfrac{dH'_\sigma}{dx}\right], \\ \left(\dfrac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right) = 2\sum_\mu \dfrac{d\Delta^\sigma w}{dx}\left[\left(\dfrac{dH'_\sigma}{dx}\right) - \dfrac{dH'_\sigma}{dx}\right] + \sum_\mu \Delta^\sigma w \left[\left(\dfrac{d^2H'_\sigma}{dx^2}\right) - \dfrac{d^2H'_\sigma}{dx^2}\right]. \end{cases}$$

On calculerait aussi les dérivées de $F(w)$. Les dérivées de $\varphi(w)$ et de $F(w)$ [1], portées dans l'expression (22), savoir :

$$(64)\quad \begin{cases} F(y) = F(w) - \dfrac{\varphi(w)}{\left(\dfrac{d\varphi(w)}{dx}\right)}\left(\dfrac{dF(w)}{dx}\right) \\ \qquad + \dfrac{1}{2}\dfrac{[\varphi(w)]^2}{\left(\dfrac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3}\left[\left(\dfrac{d\varphi(w)}{dx}\right)\left(\dfrac{d^2F(w)}{dx^2}\right) - \left(\dfrac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right)\left(\dfrac{dF(w)}{dx}\right)\right] - \ldots, \end{cases}$$

---

(1) On introduit de cette manière les dérivées $\dfrac{dw}{dx}, \dfrac{d^2w}{dx^2}, \ldots$; ces quantités peuvent se déduire de la valeur fondamentale (32), mais le moyen le plus convenable, eu égard à la convergence de l'expression (22), consiste à les obtenir par

donnent l'expression de la fonction inconnue $F(y)$, cette fonction pouvant se réduire à y, à une dérivée ou à une différence de y. Nous rappelons que cette expression se déduit de (3), en remplaçant les différentielles par des dérivées prises par rapport à x, d'après les formules (19), (20) et (21).

On doit remarquer que la valeur moyenne de la fonction y, ou de $F(y)$, est donnée exactement par l'équation réduite; donc, pour la valeur moyenne de y, l'expression (64) se réduit à son premier terme, les autres étant nuls. Pour les valeurs voisines de cette valeur moyenne de l'inconnue, l'expression (64) est très convergente, et cette convergence diminue à mesure que la fonction inconnue s'éloigne de cette valeur; aussi la valeur moyenne de y doit-elle être choisie, autant que possible, de manière à représenter la moyenne des valeurs de la fonction cherchée, dans les limites dont on a besoin.

Si, pour certaines valeurs de la fonction, l'expression (64) n'était plus assez convergente pour l'approximation que l'on désire, ou encore si elle était divergente, il faudrait transformer l'expression donnée au moyen des formules de la génération neutre, ou au moyen de la méthode d'exhaustion, ou par tout autre moyen que nous avons déjà indiqué. Dans le cas de la méthode d'exhaustion, l'expression (22), ou (64), prend la forme (27), et les valeurs des quantités Δw_1, $\Delta^2 w_1, \ldots, \frac{dw_1}{dx}, \frac{d^2 w_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d\Delta w_1}{dx}, \frac{d\Delta w_1}{dx^2}, \ldots$, s'en déduisent en faisant la fonction F égale à l'une de ces quantités; ainsi l'on aurait, pour $\frac{d\Delta w_1}{dx}$,

$$\frac{d\Delta w_1}{dx} = \frac{d\Delta w}{dx} - \frac{\varphi(w, \omega)}{\left(\frac{d\varphi(w, \omega)}{dx}\right)} \frac{d^2 \Delta w}{dx^2} + \ldots$$

Il reste encore à déterminer les constantes arbitraires, ainsi que les valeurs moyennes que nous avons supposées connues. D'après ce qui a déjà été dit au sujet de cette détermination, dans le cas d'équations

---

la différentiation de l'équation proposée. Les différences $\Delta^\sigma w$ et leurs dérivées, provenant des différentiations successives, sont considérées comme des fonctions de x données par (32); les opérations que l'on effectue alors introduisent au premier degré les dérivées cherchées et permettent de les calculer facilement.

différentielles, il convient tout d'abord de prendre les valeurs moyennes égales aux valeurs initiales qui permettent de déterminer les constantes d'intégration; on obtient alors ces constantes au moyen d'un système de μ équations linéaires simultanées. S'il convient ensuite de prendre les valeurs moyennes différentes des valeurs initiales avec les expressions données pour l'intégration, expressions qui seront complètement déterminées, on calculera la valeur moyenne β de y au moyen de celle de α de x, comme on le ferait pour des valeurs particulières quelconques; puis, substituant ces quantités α et β dans l'expression de la valeur fondamentale, on les considérera comme de nouvelles valeurs initiales, de telle sorte que les nouvelles constantes d'intégration seront déterminées par un système d'équations linéaires simultanées. Ce système sera évidemment le même que le précédent, il n'en différera que par les valeurs numériques des variables; les formules de résolution ayant servi à la première détermination des constantes serviront aussi à la seconde, en y substituant les nouvelles valeurs initiales, qui sont les valeurs moyennes adoptées.

Ce que nous avons dit au sujet de l'intégration des équations différentielles a donc lieu aussi pour les équations contenant des différences; cela nous dispense d'entrer dans plus de détails : un exemple suffira pour achever d'élucider la question.

Cinquième exemple. — Les équations différentielles que nous avons traitées comme second exemple d'application de la méthode secondaire représentent la marche de certains phénomènes; en supposant que les conditions de ces phénomènes viennent à changer périodiquement, la loi restant la même, les équations différentielles dont nous parlons conduisent à former deux équations nouvelles qui contiennent des différences au lieu de différentielles. L'une de ces équations, qu'il suffit d'écrire, est

$$(\alpha) \qquad \Delta y - \mathrm{H}uy - ru = 0,$$

en faisant

$$(\alpha)' \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{H} &= [tx + q(y-b) + cp] \\ &\quad \times \left\{ \frac{u}{2}\left[tx + q(2y-b) + cp - \frac{pn}{tx + q(y-b) + cp} \right] - 1 \right\}. \end{aligned} \right.$$

b, c, n, p, q, t et r sont des constantes, b est la valeur que prend y pour $x = 0$, et u est la différence Δx. Telle est l'équation que nous nous proposons d'intégrer.

Formons l'équation réduite ; pour cela, substituons à x et y, dans le coefficient H, leurs valeurs moyennes α et β, que nous prendrons égales respectivement aux valeurs initiales zéro et b ; H devient

$$(\beta)' \qquad h = cp\left[\frac{u}{2}\left(bq + cp - \frac{n}{c}\right) - 1\right];$$

par suite, l'équation réduite est

$$(\beta) \qquad \Delta w - huw - ru = 0,$$

d'où l'on tire

$$w = \mathrm{M}(1 + hu)^{\frac{x}{u}} - \frac{r}{h}.$$

La constante M, déterminée par les valeurs initiales, est

$$\mathrm{M} = b + \frac{r}{h},$$

ce qui donne, pour la valeur fondamentale,

$$(\gamma) \qquad w = \left(b + \frac{r}{h}\right)(1 + hu)^{\frac{x}{u}} - \frac{r}{h};$$

on en déduit les quantités suivantes :

$$(\gamma)' \qquad \begin{cases} \dfrac{dw}{dx} = \left(b + \dfrac{r}{h}\right)\dfrac{1}{u}(1 + hu)^{\frac{x}{u}}\mathrm{L}(1 + hu), \\ \Delta w = u(bh + r)(1 + hu)^{\frac{x}{u}}, \\ \dfrac{d\Delta w}{dx} = (bh + r)(1 + hu)^{\frac{x}{u}}\mathrm{L}(1 + hu). \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant calculer les fonctions $\varphi(w)$, $\left(\dfrac{d\varphi(w)}{dx}\right)$,

pour avoir l'expression de l'inconnue, d'après (64), c'est-à-dire

$$y = \varpi - \frac{\varphi(\varpi)}{\left(\dfrac{d\varphi\varpi}{dx}\right)} \frac{d\varpi}{dx} + \cdots.$$

Or, d'après (63) et (63)', en mettant H' pour H quand on substitue ϖ à y,

$$(\delta) \qquad \begin{cases} \varphi(\varpi) = u(h - \mathrm{H}')\varpi, \\ \left(\dfrac{d\varphi(\varpi)}{dx}\right) = u\left[\dfrac{d\mathrm{H}'}{dx} - \left(\dfrac{d\mathrm{H}'}{dx}\right)\right]\varpi, \end{cases}$$

et, si l'on écrit la dérivée de ϖ sous la forme

$$\frac{d\varpi}{dx} = \frac{1}{u}\left(\varpi + \frac{r}{h}\right)\mathrm{L}(1 + hu),$$

on obtient pour l'inconnue, avec deux termes seulement,

$$(\varepsilon) \qquad y = \varpi - \frac{h - \mathrm{H}'}{\dfrac{d\mathrm{H}'}{dx} - \left(\dfrac{d\mathrm{H}'}{dx}\right)} \frac{1}{u}\left(\varpi + \frac{r}{h}\right)\mathrm{L}(1 + hu).$$

Aux quantités h, H et ϖ qui entrent dans (ε) et qui sont données par (α)', (β)' et (γ), il faut joindre la suivante :

$$(\zeta) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{H}}{dx} - \left(\dfrac{d\mathrm{H}}{dx}\right) \\ \quad = t\left\{\dfrac{u}{2}\left[tx + q(2y - b) + cp - \dfrac{pn}{tx + q(y - b) + cp}\right] - 1\right\} \\ \qquad + \dfrac{tu}{2}[tx + q(y - b) + cp]\left\{1 + \dfrac{pn}{[tx + q(y - b) + cp]^2}\right\}. \end{cases}$$

L'expression (ε) donne généralement les valeurs de l'inconnue, mais si, pour certaines valeurs de x, (ε) ne donnait pas une approximation suffisante, il conviendrait de recourir à divers moyens de transformation, tels que la méthode d'exhaustion ou le changement de valeurs moyennes, comme on le sait déjà.

Exposé des méthodes en Mathématiques, d'après Wronski

(QUATRIÈME NOTE);

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES OU AUX DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES.

Soit y une fonction de ν variables indépendantes x_1, x_2, ..., x_ν; supposons que ces quantités soient liées par une relation

$$\varphi(y) = 0, \tag{65}$$

qui contient aussi des différences ou des différentielles partielles de la fonction y, jusqu'à l'ordre μ inclusivement, et cherchons à déterminer généralement la valeur d'une fonction F de la quantité y considérée comme inconnue et donnée explicitement.

En suivant la marche que nous avons déjà indiquée, nous déterminerons une fonction w des variables indépendantes, se rapprochant autant que possible de la fonction y dans les limites que l'on considère, et la fonction cherchée sera donnée par l'expression (19), savoir :

$$(66) \left\{ \begin{aligned} \mathrm{F}(y) = {} & \mathrm{F}(w) - \varphi(w) \frac{\left(\dfrac{d\mathrm{F}(w)}{dw}\right)}{\left(\dfrac{d\varphi(w)}{dw}\right)} \\ & + \frac{1}{2}[\varphi(w)]^2 \frac{\left[\left(\dfrac{d\varphi(w)}{dw}\right)\left(\dfrac{d^2\mathrm{F}(w)}{dw^2}\right) - \left(\dfrac{d^2\varphi(w)}{dw^2}\right)\left(\dfrac{d\mathrm{F}(w)}{dw}\right)\right]}{\left(\dfrac{d\varphi(w)}{dw}\right)^3} - \ldots \end{aligned} \right.$$

Il ne figure ici que les dérivées des fonctions F et φ par rapport à la quantité w; la question se réduit ainsi au calcul de ces dérivées. On a donc

$$(67)\qquad \left(\frac{d\varphi(w)}{dw}\right) = \sum\left(\frac{d\varphi(w)}{dx_\alpha}\right)\frac{1}{\dfrac{dw}{dx_\alpha}},$$

$$(67)'\qquad \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dw^2}\right) = \sum\left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx_\alpha\,dx_\beta}\right)\frac{1}{\dfrac{dw}{dx_\alpha}\,\dfrac{dw}{dx_\beta}} - \sum\left(\frac{d\varphi(w)}{dx_\alpha}\right)\left(\frac{d^2 w}{dx_\alpha\,dx_\beta}\right)\frac{1}{\left(\dfrac{dw}{dx_\alpha}\right)^2\dfrac{dw}{dx_\beta}},$$

....

Le développement de $(67)'$ s'obtient évidemment en faisant varier de 1 à ν les indices α et β, indépendamment l'un de l'autre.

Nous donnerons plus tard, d'après Wronski, l'expression générale de ces dérivées; pour l'instant les expressions (67), $(67)'$ suffisent; on saurait facilement déterminer la dérivée troisième, s'il était nécessaire.

En substituant les valeurs précédentes des dérivées de $\varphi(w)$, ainsi que les valeurs analogues de $F(w)$, dans l'expression (66), on a

$$(68)\qquad F(y) = F(w) - \varphi(w)\,\frac{\sum\left(\dfrac{dF(w)}{dx_\alpha}\right)\dfrac{1}{\dfrac{dw}{dx_\alpha}}}{\sum\left(\dfrac{d\varphi(w)}{dx_\alpha}\right)\dfrac{1}{\dfrac{dw}{dx_\alpha}}} + \ldots,$$

et l'on peut obtenir ainsi une fonction déterminée d'une intégrale de l'équation (65) supposée aux différences ou aux différentielles partielles. Nous allons maintenant achever les calculs.

Considérons une différence partielle de y d'un certain ordre ϖ; cette différence s'écrit

$$\Delta^{\varpi}_{x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots x_\nu^{\sigma_\nu}}y \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\Delta^{\varpi} y}{\Delta x_1^{\sigma_1}\Delta x_2^{\sigma_2}\ldots\Delta x_\nu^{\sigma_\nu}}\right)\Delta x_1^{\sigma_1}\Delta x_2^{\sigma_2}\ldots\Delta x_\nu^{\sigma_\nu},$$

en supposant

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\nu = \varpi.$$

Il est préférable de choisir la seconde notation comme étant plus conforme à celle des différentielles, de sorte que, en supposant les

différences infiniment petites, on a, suivant la notation ordinaire,

$$\left(\frac{d^{\varpi} y}{dx_1^{\sigma_1} dx_2^{\sigma_2} \ldots dx_\nu^{\sigma_\nu}}\right) dx_1^{\sigma_1} dx_2^{\sigma_2} \ldots dx_\nu^{\sigma_\nu};$$

la quantité entre parenthèses est alors le coefficient différentiel ou la dérivée partielle.

D'après cela, en ordonnant l'équation proposée par rapport aux différences ou aux dérivées partielles de l'inconnue, on aperçoit qu'elle se compose, pour les dérivées par exemple, de termes de la forme

$$\frac{d^{\varpi} y}{dx_1^{\sigma_1} dx_2^{\sigma_2} \ldots dx_\nu^{\sigma_\nu}} \mathrm{H}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu),$$

$\mathrm{H}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu)$ désignant une certaine fonction des variables indépendantes, de l'inconnue et de ses dérivées partielles ; ce coefficient H peut être déterminé de plusieurs manières différentes : nous devons supposer ici que le choix a été fait de la manière la plus convenable par rapport à la question que l'on traite. Par suite, l'équation (65), qui est la réunion ou l'agrégat de tous ces termes, peut s'écrire

$$(69) \quad \mathrm{Agr}^{\mu}\left[\frac{d^{\varpi} y}{dx_1^{\sigma_1} dx_2^{\sigma_2} \ldots dx_\nu^{\sigma_\nu}} \mathrm{H}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu)\right] = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu),$$

avec la condition

$$(69)' \qquad \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\nu = \varpi,$$

équation indéterminée qui doit être satisfaite en nombres entiers positifs, ϖ variant de zéro à μ ; ψ est une fonction composée uniquement des variables indépendantes.

Exemple. — Supposons $\mu = 2$ et $\nu = 3$, en appliquant la méthode de Hindenbourg à la résolution de l'équation indéterminée (69)', on a successivement

$$\varpi = 0, \quad \varpi = 1, \quad \varpi = 2.$$

Pour $\varpi = 0$, on a

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0.$$

Pour $\varpi = 1$, on a

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma'_3 = 0,$$

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 0,$$

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 1.$$

Pour $\varpi = 2$, on a

$$\sigma_1 = 2, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0,$$

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 0,$$

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 1,$$

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 2, \quad \sigma_3 = 0,$$

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 1,$$

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 2.$$

L'agrégat développé dans cet ordre est

$$\begin{aligned} y\mathrm{H}(0,0,0) &+ \frac{dy}{dx_1}\mathrm{H}(1,0,0) + \frac{dy}{dx_2}\mathrm{H}(0,1,0) + \frac{dy}{dx_3}\mathrm{H}(0,0,1) \\ &+ \frac{d^2y}{dx_1^2}\mathrm{H}(2,0,0) + \frac{d^2y}{dx_1dx_2}\mathrm{H}(1,1,0) + \frac{d^2y}{dx_1dx_3}\mathrm{H}(1,0,1) \\ &+ \frac{d^2y}{dx_2^2}\mathrm{H}(0,2,0) + \frac{d^2y}{dx_2dx_3}\mathrm{H}(0,1,1) + \frac{d^2y}{dx_3^2}\mathrm{H}(0,0,2). \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant déterminer l'*équation transformée*, dans le cas général, par l'introduction d'une quantité arbitraire ω, savoir :

$$(70) \qquad \mathrm{Agr}^{\mu} \frac{d^{\varpi}y}{dx_1^{\sigma_1}\ldots dx_\nu^{\sigma_\nu}} \left[\frac{\mathrm{H}(\sigma_1\ldots\sigma_\nu)}{\mathrm{A}(\sigma_1\ldots\sigma_\nu)}\right]^{\omega} \mathrm{A}(\sigma_1\ldots\sigma_\nu) = \left[\frac{\psi(x_1\ldots x_\nu)}{\chi}\right]^{\omega}\chi,$$

avec la condition $(69)'$ relative aux indices. Les quantités A sont des quantités constantes que l'on obtient en remplaçant les quantités variables des coefficients H par leurs *valeurs moyennes*, c'est-à-dire par des quantités constantes qui représentent aussi bien que possible les valeurs autour desquelles oscillent les quantités variables dans les limites que l'on considère. De cette façon, les quantités A sont respectivement les valeurs moyennes des coefficients H, ces lettres étant accompagnées de leurs indices, et χ est la valeur moyenne de $\psi(x_1\ldots x_\nu)$.

L'équation (70) est telle que, pour $\omega = 1$, on reproduit l'équation proposée, et pour $\omega = 0$, on obtient l'*équation réduite*

$$(71) \qquad \mathrm{Agr}^{\mu}\left[\frac{d^{\varpi} w}{dx_1^{\sigma_1} \ldots dx_\nu^{\sigma_\nu}} \mathrm{A}(\sigma_1 \ldots \sigma_\nu)\right] = \chi,$$

avec la condition (69)'. Nous remplaçons ici la variable y par w pour éviter de confondre les deux inconnues provenant d'équations différentes. L'équation (71) est une équation linéaire à coefficients constants, toujours intégrable par des moyens connus : il est donc évident que l'intégration de l'équation proposée (69), qui se déduit de celle de l'équation réduite (71), peut toujours être effectuée quelle que soit la manière dont les dérivées partielles entrent dans les coefficients. L'intégrale ainsi obtenue est l'intégrale générale de l'équation (69), car l'équation réduite (71) introduit μ fonctions arbitraires sans conditions particulières; c'est le caractère d'une intégrale générale, tandis que les intégrales singulières dépendent de certaines conditions spéciales. D'après cela, les intégrales singulières s'obtiendront en formant des équations réduites autres que l'équation (71), et l'on sera guidé dans cette formation par le problème proposé lui-même.

Il reste, pour terminer la question, à donner les formules d'intégration de l'équation linéaire à coefficients constants (71); nous ne pouvons d'autant moins nous en dispenser que ces formules sont peu usitées et qu'elles ne se trouvent guère que dans des Mémoires originaux.

On peut toujours supposer $\chi = 0$, dans l'équation (71), parce que l'inconnue w déterminée dans ce cas ne diffère de l'inconnue provenant de la supposition χ différent de zéro que par un polynôme entier en x_1, x_2, ... dont les coefficients sont de simples constantes, ou des constantes périodiques en considérant des différences finies. Si le coefficient de y n'est pas nul, le polynôme se réduit à une constante; si le coefficient de y est nul, le polynôme est du premier degré en x_1, x_2, ...; si de plus le coefficient de $\frac{dy}{dx_1}$ est nul, le polynôme contient en outre un terme en x_1^2, etc.

Cas des différences. — Soit donc l'équation linéaire à coefficients

constants et aux différences partielles d'ordre μ

$$(72) \qquad \mathrm{Agr}^{\mu}[\Delta^{\varpi}_{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_\nu^{\sigma_\nu}} w\, A(\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_\nu)] = 0,$$

avec la condition

$$(72)' \qquad \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\nu = \varpi,$$

ϖ variant de zéro à μ.

Formons, au moyen des coefficients de l'équation proposée, l'équation caractéristique

$$(73) \qquad B_\mu n^\mu + B_{\mu-1} n^{\mu-1} + \ldots + B_0 = 0,$$

où les coefficients B sont composés de la manière suivante : notons par $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ les accroissements des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, accroissements que l'on écrit ordinairement $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_\nu$, et désignons par $p_2, p_3, \ldots p_\nu$, $\nu - 1$ quantités arbitraires, en faisant, pour simplifier,

$$(74) \qquad p_2^{u_2} = q_2, \quad p_3^{u_3} = q_3, \quad \ldots, \quad p_\nu^{u_\nu} = q_\nu;$$

le coefficient général de l'équation caractéristique est alors

$$(75) \qquad \begin{cases} B_{\mu-\lambda} = \mathrm{Agr}[(q_2 - 1)^{\sigma_2}(q_3 - 1)^{\sigma_3} \ldots (q_\nu - 1)^{\sigma_\nu} A(\mu - \lambda, \sigma_2 \ldots \sigma_\nu)] \\ \qquad - \dfrac{\mu - \lambda + 1}{1} B_{\mu-\lambda+1} + \dfrac{(\mu - \lambda + 1)(\mu - \lambda + 2)}{1.2} B_{\mu-\lambda+2} - \ldots \\ \qquad + (-1)^\lambda \dfrac{(\mu - \lambda + 1) \ldots (\mu - 1)\mu}{1.2 \ldots \lambda} B_\mu, \end{cases}$$

avec la condition relative à l'agrégat

$$(75)' \qquad \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_\nu = \tau,$$

τ variant de zéro à λ. L'inconnue w a ensuite pour expression

$$(76) \qquad w = S[p_2^{x_2} p_3^{x_3} \ldots p_\nu^{x_\nu}(M_1 n_1^\zeta + M_2 n_2^\zeta + \ldots + M_\mu n_\mu^\zeta)],$$

en faisant $\zeta = \dfrac{x_1}{u_1}$, et $M_1, M_2, \ldots, M_\nu$ étant μ constantes d'intégration;

S indique que la somme d'un nombre quelconque de quantités pareilles à celle qui est entre crochets satisfait à l'équation (72), et les quantités arbitraires $p_2, p_3, \ldots, p_\nu$ peuvent varier à volonté d'un terme à l'autre.

Nous donnerons plus tard le moyen de parvenir directement à l'expression (76); pour l'instant, il suffit de vérifier qu'elle satisfait à l'équation proposée. Voici comment on peut effectuer cette vérification.

Posons $m = n - 1$, et, au lieu de l'équation caractéristique (73), considérons l'équation

$$(77) \qquad C_\mu m^\mu + C_{\mu-1} m^{\mu-1} + \ldots + C_0 = 0;$$

on déduirait facilement de (75) que le coefficient général est

$$(78) \quad C_{\mu-\lambda} = \text{Agr}[(q_2-1)^{\sigma_2}(q_3-1)^{\sigma_3}\ldots(q_\nu-1)^{\sigma_\nu} A(\mu-\lambda, \sigma_2 \ldots \sigma_\nu)],$$

avec la condition (75)'.

Prenons maintenant les différences de w, d'après l'expression (76), en négligeant la somme S, et portons-les dans l'équation (72); nous aurons

$$\begin{aligned}\text{Agr}[p_2^{x_2} \ldots p_\nu^{x_\nu}&(q_2-1)^{\sigma_2}\ldots(q_\nu-1)^{\sigma_\nu} \\ &\times (M_1 n_1^\zeta m_1^{\sigma_1} + \ldots + M_\mu n_\mu^\zeta m_\mu^{\sigma_1}) A(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu)] = 0,\end{aligned}$$

avec la condition (72)'; puis, ordonnant par rapport aux quantités qui contiennent les exponentielles n^ζ, et tenant compte de (78), il vient

$$\begin{aligned}p_2^{x_2} \ldots p_\nu^{x_\nu}&(M_1 n_1^\zeta m_1^\mu + \ldots + M_\mu n_\mu m_\mu^\mu) C_\mu \\ &+ p_2^{x_2} \ldots p_\nu^{x_\nu}(M_1 n_1^\zeta m_1^{\mu-1} + \ldots + M_\mu n_\mu m_\mu^{\mu-1}) C_{\mu-1} + \ldots \\ &\qquad + p_2^{x_2} \ldots p_\nu^{x_\nu}(M_1 n_1^\zeta + \ldots + M_\mu n_\mu^\zeta) C_0 = 0.\end{aligned}$$

En vertu de (77), cette expression est nulle identiquement, ce qu'il fallait montrer. Il est évident que cette vérification, ayant lieu pour un terme de la somme S, a lieu aussi pour un nombre quelconque de termes composant cette somme.

Revenons à l'expression (76) : cette expression fondamentale ne

peut être d'aucune utilité, sous la forme où elle se présente, parce qu'elle contient les racines n de l'équation caractéristique (73), laquelle a ses coefficients formés de quantités arbitraires $p_2, p_3, \ldots, p_\nu$; il en résulte que, la nature réelle ou imaginaire des racines n ne pouvant être précisée, ces racines ne peuvent entrer pratiquement dans les calculs (à cause aussi de la difficulté que présenterait la résolution d'une équation algébrique). Il est donc de toute nécessité de transformer l'expression (76); le seul moyen dont on puisse faire usage ici, d'une façon générale, est la transformation par les fonctions symétriques.

Pour cela, opérons comme nous l'avons fait quand il s'agissait de différences totales; posons, comme l'indique Wronski,

$$n^\zeta = Z_1 + Z_2 n + \ldots + Z_\mu n^{\mu-1},$$

et donnons à n les μ valeurs qui satisfont à l'équation (73), nous obtenons ainsi μ équations linéaires dont les fonctions Z sont les inconnues.

La résolution de ces équations donne, en supposant qu'il n'y ait pas de racines égales,

$$(79) \qquad Z_\lambda = \frac{\text{Ⓓ}(n_1^0 n_2^1 \ldots n_{\lambda-1}^{\lambda-2} n_\lambda^\zeta n_{\lambda+1}^\lambda \ldots n_\mu^{\mu-1})}{\text{Ⓓ}(n_1^0 n_2^1 \ldots n_\lambda^{\lambda-1} \ldots n_\mu^{\mu-1})}.$$

Ces fonctions Z sont bien des fonctions symétriques des quantités n : elles sont donc exprimables au moyen des coefficients de l'équation (73), comme nous l'avons déjà reconnu précédemment. En ordonnant le numérateur de l'expression (79) par rapport à n_λ^ζ, on obtient

$$Z_\lambda = \frac{N_1^{(\lambda)}}{N} n_1^\zeta + \frac{N_2^{(\lambda)}}{N} n_2^\zeta + \ldots + \frac{N_\mu^{(\lambda)}}{N} n_\mu^\zeta;$$

N représente le dénominateur de (79) et les autres quantités $N^{(\lambda)}$ des déterminants mineurs, aux signes près.

D'après cela, si l'on pose

$$M_1 = \frac{N_1^{(\lambda)}}{N} P_\lambda, \quad M_2 = \frac{N_2^{(\lambda)}}{N} P_\lambda, \quad \ldots, \quad M_\mu = \frac{N_\mu^{(\lambda)}}{N} P_\lambda,$$

P_λ étant une nouvelle constante, on a, pour la fonction ϖ,

$$\varpi = S(p_2^{x_2} p_3^{x_3} \dots p_\nu^{x_\nu} P_\lambda Z_\lambda),$$

et, comme il existe μ fonctions Z, il y a μ sommes semblables, ce qui donne

$$(80) \quad \varpi = S(p_2^{x_2} \dots p_\nu^{x_\nu} P_1 Z_1) + S(p_2^{x_2} \dots p_\nu^{x_\nu} P_2 Z_2) + \dots + S(p_2^{x_2} \dots p_\nu^{x_\nu} P_\mu Z_\mu);$$

les quantités p varient à volonté d'une somme à l'autre.

De cette expression, qui ne contient que des constantes arbitraires, il est facile de passer à une autre qui contienne des fonctions arbitraires. Développons les fonctions Z par rapport aux puissances de $p_2^{u_2}$, $p_3^{u_3}$, ..., puissances que nous avons représentées par q_2, q_3, ..., d'après (74); nous aurons ainsi relativement à l'une des sommes de (80), par la formule de Maclaurin étendue à plusieurs variables,

$$\operatorname{Agr}\left[\frac{p_2^{\sigma_2 u_2} p_3^{\sigma_3 u_3} \dots p_\nu^{\sigma_\nu u_\nu}}{1^{\sigma_2|1} 1^{\sigma_3|1} \dots 1^{\sigma_\nu|1}} \left(\frac{d^\varpi Z_\lambda}{dq_2^{\sigma_2} dq_3^{\sigma_3} \dots dq_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 S(p_2^{x_2} p_3^{x_3} \dots p_\nu^{x_\nu} P_\lambda)\right],$$

avec la condition

$$\sigma_2 + \sigma_3 + \dots + \sigma_\nu = \varpi.$$

Le chiffre 0, placé au bas de l'une des parenthèses, indique que l'on fait $q_2 = q_3 = \dots = q_\nu = 0$, après la différentiation de Z_ν.

Si nous posons, pour abréger,

$$\frac{1}{1^{\sigma_2|1} 1^{\sigma_3|1} \dots 1^{\sigma_\nu|1}} = \theta,$$

l'expression précédente pourra s'écrire

$$(80)' \qquad \operatorname{Agr}\left[\theta \left(\frac{d^\varpi Z_\lambda}{dq_2^{\sigma_2} \dots dq_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 S(p_2^{x_2 + \sigma_2 u_2} \dots p_\nu^{x_\nu + \sigma_\nu u_\nu} P_\lambda)\right].$$

Mais, par suite des valeurs arbitraires des quantités p, la somme comprise sous le signe S est une fonction arbitraire, f_λ, des quantités $x_2 + \sigma_2 u_2$, $x_3 + \sigma_3 u_3$, ... D'un autre côté, à cause de l'expression (79)

des fonctions Z et de l'expression (75) des coefficients B de l'équation caractéristique, on voit que, quand ζ est un nombre entier plus grand que $\mu - 1$, alors que $\varpi > \zeta - \lambda + 1$, les dérivées de Z_λ sont nulles, puisque les fonctions Z sont fonctions rationnelles des coefficients B; de plus, comme la factorielle $\frac{1}{1^{\sigma|1}}$ [1] est nulle pour les valeurs négatives de σ, il en résulte que, les quantités $\sigma_2, \sigma_3, \ldots$ variant de $-\infty$ à $+\infty$, les termes du développement (80)′ n'ont de valeurs différentes de zéro que si ϖ est compris entre zéro et $\zeta - \lambda + 1$. L'agrégat (80)′ est donc une intégrale définie, prise entre les limites zéro et $\zeta - \lambda + 1$ de x, et l'on a, pour expression de la fonction cherchée,

$$(81)\quad \left\{\begin{aligned} \wp = {} & \sum_{\zeta} \left[\theta\left(\frac{d^{\omega} Z_1}{dq_2^{\sigma_2}\ldots dq_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 f_1(x_2 + \sigma_2 u_2, \ldots, x_\nu + \sigma_\nu u_\nu)\right] \\ & + \sum_{\zeta-1} \left[\theta\left(\frac{d^{\omega} Z_2}{dq_2^{\sigma_2}\ldots dq_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 f_2(x_2 + \sigma_2 u_2, \ldots, x_\nu + \sigma_\nu u_\nu)\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \sum_{\zeta-\mu+1} \left[\theta\left(\frac{d^{\omega} Z_\mu}{dq_2^{\sigma_2}\ldots dq_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 f_\mu(x_2 + \sigma_2 u_2, \ldots, x_\nu + \sigma_\nu u_\nu)\right]. \end{aligned}\right.$$

Telle est la forme donnée par Wronski à la fonction intégrale de l'équation proposée dans sa *Critique des fonctions génératrices*. On doit remarquer que le problème est très simplement résolu, puisque la solution se trouve ramenée au calcul de fonctions symétriques et à

---

[1] On a, en effet,

$$x^{\rho+\sigma|\xi} = x^{\rho|\xi}(x + \rho\xi)^{\sigma|\xi},$$

d'où

$$\frac{x^{\rho+\sigma|\xi}}{x^{\rho|\xi}} = (x + \rho\xi)^{\sigma|\xi}.$$

Si l'on fait $\rho = -\sigma$, il vient

$$\frac{1}{x^{-\sigma|\xi}} = (x - \sigma\xi)^{\sigma|\xi} = (x - \sigma)(x - \sigma + \xi)(x - \sigma + 2\xi)\ldots(x - \xi);$$

par suite, en donnant à x et à ξ la même valeur, l'unité, par exemple, on voit que la factorielle $\frac{1}{1^{-\sigma|1}}$ est nulle.

celui de leurs dérivées, calculs que l'on peut toujours exécuter comme nous allons le faire.

D'après le théorème donné par les expressions (46) et (46)', nous avons

$$(82)\quad \left\{\begin{aligned} Z_\lambda B_\mu &= \frac{\circledast(n_1^0 n_2^1 \ldots n_\lambda^\zeta \ldots n_\mu^{\mu-1})}{N} B_\mu \\ &= \aleph(\zeta - \mu + 1) B_\lambda + \aleph(\zeta - \mu + 2) B_{\lambda+1} + \ldots \\ &\qquad + \aleph(\zeta - \lambda + 1) B_\mu, \end{aligned}\right.$$

et les fonctions aleph se calculeraient d'après les relations (49) et (49)'. Si l'on veut formuler le résultat de ces dernières opérations, on obtient, comme nous le verrons plus tard, en traitant spécialement des fonctions aleph,

$$(83)\quad \aleph(\xi) = (-1)^\xi \operatorname{Agr}\left\{ 1^{\varsigma|1} \left(\frac{-1}{B_\mu}\right)^\varsigma \frac{(-B_{\mu-1})^{\rho_1}(+B_{\mu-2})^{\rho_2} \ldots [(-1)^{\mu-\xi} B_{\mu-\xi}]^{\rho_\xi}}{1^{\rho_1|1}\, 1^{\rho_2|1} \ldots 1^{\rho_\xi|1}} \right\},$$

avec les conditions

$$(83)'\quad \left\{\begin{aligned} &\rho_1 + 2\rho_2 + 3\rho_3 + \ldots + \xi\rho_\xi = \xi, \\ &\rho_1 + \rho_2 \;\; + \ldots\ldots\ldots + \rho_\xi = \varsigma. \end{aligned}\right.$$

Ainsi les fonctions Z sont connues, soit que l'on calcule les fonctions aleph dont elles sont formées, indirectement au moyen des relations (49) et (49)', soit directement au moyen de (83) et (83)'.

Il reste à obtenir les dérivées des fonctions Z par rapport aux quantités $q_2, q_3, \ldots, q_\nu$ qui entrent dans les coefficients B de l'équation caractéristique. Pour cela, considérons le produit

$$(q_2 - 1)^{\sigma_2}(q_3 - 1)^{\sigma_3} \ldots (q_\nu - 1)^{\sigma_\nu}$$

qui entre dans l'expression (75), et désignons-le par Π; prenons la υ^{ieme} dérivée de ce produit, nous aurons

$$\frac{d^\upsilon \Pi}{dq_2^{\rho_2} \ldots dq_\nu^{\rho_\nu}} = \sigma_2^{\rho_2|-1}(q_2 - 1)^{\sigma_2 - \rho_2} \sigma_3^{\rho_3|-1}(q_3 - 1)^{\sigma_3 - \rho_3} \ldots \sigma_\nu^{\rho_\nu|-1}(q_\nu - 1)^{\sigma_\nu - \rho_\nu},$$

en ayant égard à

$$\rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_\nu = \upsilon.$$

Or, en faisant $q_2 = q_3 = \ldots = q_\nu = 0$ après la dérivation, on a

$$\left(\frac{d^\upsilon \Pi}{dq_2^{\rho_2} \ldots dq_\nu^{\rho_\nu}}\right) = (-1)^{\tau-\upsilon} \sigma_2^{\rho_2|-1} \ldots \sigma_\nu^{\rho_\nu|-1}$$

et, par suite,

$$(84) \quad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{d^\upsilon B_{\mu-\lambda}}{dq_2^{\rho_2} \ldots dq_\nu^{\rho_\nu}}\right)_0 = {} & \operatorname{Agr}\left[(-1)^{\tau-\upsilon} \sigma_2^{\rho_2|-1} \ldots \sigma_\nu^{\rho_\nu|-1} A(\mu - \lambda, \sigma_2 \ldots \sigma_\nu)\right] \\ & - \frac{\mu - \lambda + 1}{1} \left(\frac{d^\upsilon B_{\mu-\lambda+1}}{dq_2^{\rho_2} \ldots dq_\nu^{\rho_\nu}}\right)_0 + \ldots \\ & + (-1)^\lambda \frac{(\mu - \lambda + 1)^{\lambda|1}}{1^{\lambda|1}} \left(\frac{d^\upsilon B_\mu}{dq_2^{\rho_2} \ldots dq_\nu^{\rho_\nu}}\right)_0, \end{aligned}\right.$$

en ayant toujours égard à

$$(84)' \quad \left\{\begin{aligned} & \rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_\nu = \upsilon, \\ & \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_\nu = \tau. \end{aligned}\right.$$

Il faut observer qu'un terme sera nul dans un des agrégats, quand l'une des factorielles qui entrent dans sa composition sera nulle ellemême; cela arrivera toutes les fois que l'exposant ρ de la base σ sera plus grand que cette base.

Maintenant, au moyen de simples substitutions, on parviendra à calculer la dérivée d'une fonction aleph par (84), et ensuite la dérivée d'une fonction Z par (83); on observera à ce sujet que le calcul est poussé aussi loin qu'il est possible de le faire, vu sa complication, car les substitutions ne sont ici qu'une chose secondaire; on sait d'ailleurs que, dans les calculs numériques, il est avantageux de n'effectuer les substitutions que successivement, lorsque les premières formules ont permis d'obtenir les valeurs numériques des quantités qui entrent dans les formules qui viennent ensuite.

Si l'on observe que, dans les formules précédentes, notamment dans celles qui donnent les coefficients B, les quantités q entrent principalement sous la forme $q - 1$, on peut se proposer, comme devant être préférable dans certains cas, de développer les fonctions Z par rapport aux quantités $q - 1$, mais il faudra également développer les produits $(q_2 - 1)^{\sigma_2}$, $(q_3 - 1)^{\sigma_3}$, ..., pour ordonner ensuite par rapport aux puis-

sances de q_2, q_3, ..., c'est-à-dire de $p_2^{u_2}$, $p_3^{u_3}$, ..., pour faire entrer ces quantités dans la somme $S(p_2^{x_2} p_3^{x_3} \ldots P_\lambda)$. Nous reviendrons plus loin sur cette transformation; il faut seulement remarquer que, dans les dérivées de Z, on fera après les opérations $q = 1$, de sorte que la dérivée $\left(\frac{d^\upsilon \Pi}{dq_2^{\rho_2} \ldots dq_\nu^{\rho_\nu}}\right)_1$ est nulle à moins que $\rho_2 = \sigma_2$, $\rho_3 = \sigma_3$, ..., et, par suite, $\upsilon = \tau$, ce qui réduit l'agrégat, formant le premier terme de l'expression (75) de $B_{\mu-\lambda}$, au seul terme

$$1^{\sigma_2 | 1} \ldots 1^{\sigma_\nu | 1} A(\mu - \lambda, \sigma_2 \ldots \sigma_\nu).$$

Exemple. — Comme exemple d'application de ce qui précède, reprenons l'équation du second ordre à trois variables que nous avons développée plus haut; calculons les coefficients de l'équation caractéristique, les dérivées de ces coefficients, les fonctions ℵ et les fonctions Z. Puisque nous considérons des coefficients constants, nous remplacerons les lettres Π par A.

1° L'équation caractéristique

$$B_2 n^2 + B_1 n + B_0 = 0$$

a pour coefficients, d'après (75), les quantités suivantes :

Pour $\lambda = 0$, $\tau = 0$ (75)′ donne

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0,$$

d'où

$$B_2 = A(2, 0, 0).$$

Pour $\lambda = 1$, τ a les valeurs 0 et 1.

$\tau = 0$ donne

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

$\tau = 1$ donne

$$\sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 0,$$

$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 1.$$

L'agrégat de (75) se compose de trois termes :

$$A(1, 0, 0) + (q_2 - 1) A(1, 1, 0) + (q_3 - 1) A(1, 0, 1),$$

d'où

$$B_1 = A(1, 0, 0) + (q_2 - 1) A(1, 1, 0) + (q_3 - 1) A(1, 0, 1) - 2 A(2, 0, 0).$$

Pour $\lambda = 2$, τ a les valeurs 0 et 2 ; $\tau = 0$ donne

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0;$$

$\tau = 1$ donne

$$\sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 0,$$

$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 1;$$

$\tau = 2$ donne

$$\sigma_2 = 2, \quad \sigma_3 = 0,$$

$$\sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 1,$$

$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 2.$$

L'agrégat de (75) se compose ici de huit termes

$$A(0, 0, 0) + (q_2 - 1) A(0, 1, 0) + (q_3 - 1) A(0, 0, 1) \\ + (q_2 - 1)^2 A(0, 2, 0) + (q_2 - 1)(q_3 - 1) A(0, 1, 1) + (q_3 - 1)^2 A(0, 0, 2),$$

d'où

$$B_0 = A(0, 0, 0) + (q_2 - 1) A(0, 1, 0) + \ldots + (q_3 - 1)^2 A(0, 0, 2) \\ - [A(1, 0, 0) + (q_2 - 1) A(1, 1, 0) + (q_3 - 1) A(1, 0, 1) - 2 A(2, 0, 0)] \\ + A(2, 0, 0).$$

2° Ensuite, pour former les dérivées de ces coefficients B_2, B_1, B_0, nous avons, d'après (84) et (84)', pour la première dérivée par rapport à q_2, $\upsilon = 1$. Or, pour le coefficient B_2, $\lambda = 0$, on a seulement $\tau = 0$, ce qui indique que la dérivée est nulle, comme cela est d'ailleurs évident,

$$\left(\frac{dB_2}{dq_2}\right)_0 = 0.$$

Pour le coefficient B_1, $\lambda = 1$, puisque υ doit être égal à l'unité,

$\rho_2 = 1$ et $\rho_3 = 0$; on a, par (84),

$$\left(\frac{dB_1}{dq_2}\right)_0 = A(1, 1, 0).$$

Pour le coefficient B_0, $\lambda = 2$, puisque l'on a encore $\upsilon = 1$, $\rho_2 = 1$, $\rho_3 = 0$, pour la dérivée par rapport à q_2, il vient

$$\left(\frac{dB_0}{dq_2}\right)_0 = \text{Agr}[(-1)^{\tau-1}\sigma_2 A(0, \sigma_2, \sigma_3)] - A(1, 1, 0);$$

pour $\tau = 0$, on a

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad \text{Agr} = 0;$$

pour $\tau = 1$, on a

$$\sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 0, \quad \text{Agr} = 1 . A(0, 1, 0),$$
$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 1, \quad \text{Agr} = 0;$$

pour $\tau = 2$, on a

$$\sigma_2 = 2, \quad \sigma_3 = 0, \quad \text{Agr} = (-1)2A(0, 2, 0),$$
$$\sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 1, \quad \text{Agr} = (-1)A(0, 1, 1),$$
$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 2, \quad \text{Agr} = 0;$$

Par suite

$$\left(\frac{dB_0}{dq_2}\right)_0 = A(0, 1, 0) - 2A(0, 2, 0) - A(0, 1, 1) - A(1, 1, 0).$$

Pour la seconde dérivée par rapport à q_2, $\upsilon = 2$ avec $\rho_2 = 2$, $\rho_3 = 0$, on a

$$\left(\frac{d^2B_0}{dq_2^2}\right)_0 = \text{Agr}[(-1)^{\tau-2}\sigma_2^{2|-1} A(0, \sigma_2, \sigma_3)];$$

pour $\tau = 0$,

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad \text{Agr} = 0;$$

pour $\tau = 1$,

$$\sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 0, \quad \text{Agr} = (-1)(1-1)A(0, 1, 0) = 0$$

pour $\tau = 2$,

$$\sigma_2 = 2, \quad \sigma_3 = 0, \quad \text{Agr} = (-1)^0\, 2 . 1 . \text{A}(0, 2, 0),$$

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_2 = 1, & \sigma_3 = 1, \\ \sigma_2 = 0, & \sigma_3 = 2, \end{array}\right\} \text{Agr} = 0;$$

par suite

$$\left(\frac{d^2 \text{B}_0}{dq_2^2}\right)_0 = 2\,\text{A}(0, 2, 0).$$

Dans le cas de $\upsilon = 2$, avec $\rho_2 = 1$, $\rho_3 = 1$, la dérivée sera

$$\left(\frac{d^2 \text{B}_0}{dq_2\, dq_3}\right)_0 = \text{Agr}\,[(-1)^{\tau-2} \sigma_2 \sigma_3\, \text{A}(0, \sigma_2, \sigma_3)];$$

pour $\tau = 0$, ou 1,

$$\text{Agr} = 0;$$

pour $\tau = 2$,

$$\sigma_2 = 2, \quad \sigma_3 = 0, \quad \text{Agr} = 0,$$

$$\sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 1, \quad \text{Agr} = (-1)^0 . 1 . 1\, \text{A}(0, 1, 1),$$

$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 2, \quad \text{Agr} = 0;$$

par suite

$$\left(\frac{d^2 \text{B}_0}{dq_2\, dq_3}\right)_0 = \text{A}(0, 1, 1).$$

Les dérivées supérieures sont évidemment nulles.

3° En ce qui concerne les fonctions aleph, d'après (83) et (83)′, on a :

Pour $\xi = 1$,

$$\aleph(1) = -\frac{\text{B}_1}{\text{B}_2}.$$

Pour $\xi = 2$,

$$\aleph(2) = \text{Agr}\left[1^{\varsigma|1} \left(\frac{-1}{\text{B}_2}\right)^{\varsigma} \frac{(-\text{B}_1)^{\rho_1}}{1^{\rho_1|1}} \frac{(+\text{B}_0)^{\rho_2}}{1^{\rho_2|1}}\right],$$

avec

$$\rho_1 + 2\rho_2 = 2,$$

$$\rho_1 + \rho_2 = \varsigma;$$

ce qui donne

$$\rho_1 = 2, \quad \rho_2 = 0, \quad \varsigma = 2,$$

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = 1, \quad \varsigma = 1,$$

d'où

$$\aleph(2) = \left(\frac{B_1}{B_2}\right)^2 - \frac{B_0}{B_2}.$$

Pour $\xi = 3$,

$$\aleph(3) = (-1)^3 \operatorname{Agr}\left[1^{\varsigma|1}\left(\frac{-1}{B_2}\right)^{\varsigma} \frac{(-B_1)^{\rho_1}}{1^{\rho_1|1}} \frac{(+B_0)^{\rho_2}}{1^{\rho_2|1}}\right],$$

avec

$$\rho_1 + 2\rho_2 + 3\rho_3 = 3,$$
$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = \varsigma.$$

Cet agrégat ne contient pas le facteur $\frac{(-B_{-1})^{\rho_3}}{1^{\rho_3|1}}$, parce que, le coefficient B_{-1} n'existant pas, ou étant nul, les termes qui subsisteront dans le développement seront ceux pour lesquels on aura $\rho_3 = 0$. On a donc les systèmes suivants :

$$\rho_1 = 3, \quad \rho_2 = 0, \quad \rho_3 = 0, \quad \varsigma = 3,$$
$$\rho_1 = 1, \quad \rho_2 = 1, \quad \rho_3 = 0, \quad \varsigma = 2,$$
$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = 0, \quad \rho_3 = 1, \quad \varsigma = 1.$$

D'après ce que nous venons de dire, les deux premiers systèmes seuls conviennent; par suite, il vient

$$\aleph(3) = -\left(\frac{B_1}{B_2}\right)^3 + 2\frac{B_1 B_0}{B_2^2}.$$

Pour $\xi = 4$,

$$\aleph(4) = \operatorname{Agr}\left[1^{\varsigma|1}\left(\frac{-1}{B_2}\right)^{\varsigma} \frac{(-B_1)^{\rho_1}}{1^{\rho_1|1}} \frac{(+B_0)^{\rho_2}}{1^{\rho_2|1}}\right],$$

avec

$$\rho_1 + 2\rho_2 + 3\rho_3 + 4\rho_4 = 4,$$
$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 = \varsigma;$$

ce qui donne

$$\rho_1 = 4, \quad \rho_2 = 0, \quad \rho_3 = 0, \quad \rho_4 = 0, \quad \varsigma = 4,$$
$$\rho_1 = 2, \quad \rho_2 = 1, \quad \rho_3 = 0, \quad \rho_4 = 0, \quad \varsigma = 3,$$
$$\rho_1 = 1, \quad \rho_2 = 0, \quad \rho_3 = 1, \quad \rho_4 = 0, \quad \varsigma = 2,$$
$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = 2, \quad \rho_3 = 0, \quad \rho_4 = 0, \quad \varsigma = 2,$$
$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = 0, \quad \rho_3 = 0, \quad \rho_4 = 1, \quad \varsigma = 1.$$

Le troisième et le cinquième système de valeurs, donnant des termes nuls, ne conviennent pas; le développement de l'agrégat se compose donc de trois termes

$$\aleph(4) = \left(\frac{B_1}{B_2}\right)^4 - 3\frac{B_1^2 B_0}{B_2^3} + \frac{B_0^2}{B_2^2}.$$

On vérifierait facilement l'exactitude de ces quantités en calculant de proche en proche les fonctions aleph au moyen des relations (49) et (49)'.

4° Enfin le calcul des fonctions Z ne présente aucune difficulté; il n'y a ici que deux fonctions, d'après (82),

$$Z_1 = \aleph(\zeta - 1)\frac{B_1}{B_2} + \aleph(\zeta) = -\aleph(\zeta - 2)\frac{B_0}{B_2},$$

$$Z_2 = \aleph(\zeta - 1).$$

Ces valeurs se vérifient aisément; en effet, on a

$$Z_1 = n_1 n_2 \frac{n_1^{\zeta-1} - n_2^{\zeta-1}}{n_2 - n_1} = -n_1 n_2 (n_2^{\zeta-2} + n_2^{\zeta-3} n_1 + \ldots + n_1^{\zeta-2}),$$

$$Z_2 = \frac{n_2^{\zeta} - n_1^{\zeta}}{n_2 - n_1} = n_2^{\zeta-1} + n_2^{\zeta-2} n_1 + \ldots + n_2 n_1^{\zeta-2} + n_1^{\zeta-1},$$

et l'on reconnaît ainsi le développement des fonctions aleph que nous venons d'obtenir. La suite du calcul n'offre aucun intérêt.

Nous n'avons pas à nous arrêter au cas où il existerait des relations entre les coefficients de l'équation différentielle.

L'intégration complète de l'équation (72) aux différences partielles, linéaire et à coefficients constants, formant l'équation réduite de l'équation proposée (65), est ainsi donnée par l'ensemble des formules (73), (74), (75), (75)', (84), (84)', pour ce qui concerne la formation des coefficients de l'équation caractéristique (73), et (81), (82), (83), (83)', (84), (84)', pour les quantités qui entrent dans l'expression (81), la fonction cherchée w.

Intégrale générale de l'équation proposée. — Pour former les quantités qui entrent dans l'expression (68) de l'intégrale générale de l'équation proposée aux différences partielles (65), il resterait à prendre

les différences et les dérivées de la fonction w par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$. Pour la première variable x_1, il faudrait opérer sur les fonctions $\aleph$ de la forme $\aleph(\zeta + \eta)$, ζ étant $\frac{x_1}{\Delta x_1}$ et η une constante. Nous avons déjà effectué ce calcul à propos des équations aux différences totales [formules (56) à (62)] : il n'y a donc pas lieu d'y revenir; remarquons seulement que, par suite des transformations auxquelles on est conduit, il faut prendre, au lieu de racines m de l'équation caractéristique, les racines $m - 1$ ou n de l'équation (77); cette dernière est ainsi la véritable équation caractéristique, et ce sont les coefficients C de (77) qui doivent être introduits dans les calculs au lieu des coefficients B de (73). Quant aux différences et aux dérivées par rapport aux variables $x_2, \ldots, x_\nu$, elles doivent être prises sur les fonctions arbitraires $f_1, f_2, \ldots$; on les obtiendra sans difficulté une fois la forme de ces fonctions déterminée.

Mais le moyen d'obtenir généralement les dérivées partielles de w qui entrent dans l'expression (68) consiste, comme nous l'avons déjà indiqué, à prendre les différentielles totales des divers ordres de l'équation proposée (équation en y); on aura, de cette manière, autant de relations qu'il est nécessaire d'en avoir pour déterminer les dérivées partielles en question; on changera ensuite y en w.

Ainsi, pour l'équation proposée, que nous écrirons $\varphi = 0$, nous aurons, pour la première différentiation, un résultat de la forme

$$\left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right) dx_1 + \left(\frac{d\varphi}{dx_2}\right) dx_2 + \ldots + \left(\frac{d\varphi}{dx_\nu}\right) dx_\nu + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) dy = 0,$$

et, comme y est fonction des variables indépendantes,

$$dy = \frac{dy}{dx_1} dx_1 + \frac{dy}{dx_2} dx_2 + \ldots + \frac{dy}{dx_\nu} dx_\nu,$$

il vient alors

$$\left[\left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{dy}{dx_1}\right] dx_1 + \left[\left(\frac{d\varphi}{dx_2}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{dy}{dx_2}\right] dx_2 + \ldots$$
$$+ \left[\left(\frac{d\varphi}{dx_\nu}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{dy}{dx_\nu}\right] dx_\nu = 0.$$

Les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ étant indépendantes les unes des autres,

l'égalité précédente donne les relations

$$\left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{dy}{dx_1} = 0,$$
$$\left(\frac{d\varphi}{dx_2}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{dy}{dx_2} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\left(\frac{d\varphi}{dx_\nu}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{dy}{dx_\nu} = 0,$$

et les dérivées partielles du premier ordre de y se trouvent déterminées par des relations du premier degré. En opérant d'une manière analogue, on obtiendrait les dérivées partielles du second ordre de y, et ainsi de suite, toutes les dérivées se trouvant déterminées par des équations linéaires. Ensuite on remplacera y par w, ce qui permettra de calculer au moyen de l'expression (81) les fonctions de cette quantité qui entrent dans les relations linéaires; on obtient en général, de cette manière, les dérivées partielles de w d'une manière bien plus exacte que si on les déduisait directement de l'expression (81), et l'expression fondamentale (68) est plus convergente.

L'expression (68) donne, au moyen des quantités qui viennent d'être déterminées, l'intégrale générale de l'équation proposée (65), parce que l'on introduit μ fonctions arbitraires. Mais ces fonctions peuvent toutes, ou en partie, se réduire à des constantes périodiques; ces constantes devant donner les valeurs initiales des différences partielles seront au nombre maximum de

$$\frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+\nu)}{1.2\ldots\nu} - 1.$$

Il faut retrancher l'unité du rapport des factorielles à cause de l'équation proposée qui donne une relation entre les valeurs initiales de l'inconnue et de ses différences partielles des différents ordres.

Cas des différentielles. — Examinons maintenant le cas où les différences deviennent infiniment petites; soit l'équation linéaire à coefficients constants et aux dérivées partielles, d'ordre μ,

$$(85) \qquad \mathrm{Agr}^{\mu}\left[\frac{d^{\varpi} w}{dx_1^{\sigma_1}\, dx_2^{\sigma_2}\ldots a_\nu^{\sigma_\nu}} \mathrm{A}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu)\right] = 0,$$

avec la condition

$$(85)' \qquad \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\nu = \varpi.$$

Les différences $\Delta\varpi$, u_1, u_2, ..., que nous avions plus haut, deviennent des différentielles $d\varpi$, dx_1, dx_2, ..., de sorte que, si nous comparons l'équation (85) à l'équation (72), nous devons considérer la différence $\Delta^\varpi \varpi$ comme remplacée par la différentielle $d^\varpi \varpi$, et les différentielles des variables indépendantes qui sont données comme faisant partie intégrante des coefficients constants. Il en résulte que, dans l'équation caractéristique, les quantités $q - 1$ ou $p^u - 1$, donnent

$$\frac{p^{dx} - 1}{dx} = \mathrm{L}p,$$

et les racines n deviennent $1 - m\,dx$, ce qui donne aussi

$$m = \frac{n-1}{dx}.$$

Ainsi, en vue de l'équation (73), nous sommes conduit à prendre pour équation caractéristique une équation de la forme de l'équation (77), savoir

$$(86) \qquad \mathrm{C}_\mu m^\mu + \mathrm{C}_{\mu-1} m^{\mu-1} + \ldots + \mathrm{C}_0 = 0,$$

dont les coefficients sont

$$(87) \quad \mathrm{C}_{\mu-\lambda} = \mathrm{Agr}^\lambda [(\mathrm{L}p_2)^{\sigma_2} (\mathrm{L}p_3)^{\sigma_3} \ldots (\mathrm{L}p_\nu)^{\sigma_\nu} \mathrm{A}(\mu - \lambda, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_\nu)]$$

avec la condition

$$(87)' \qquad \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_\nu = \tau,$$

τ variant de 0 à λ.

Ensuite, pour ce qui concerne l'expression (76) de l'intégrale, puisque n^ζ, où $\zeta = \frac{x}{u}$, devient $n^{\frac{x}{dx}}$,

$$n^{\frac{x}{dx}} = (1 + m\,dx)^{\frac{x}{dx}} = e^{mx};$$

nous avons donc

$$(88)\qquad w = \mathrm{S}\left[p_2^{x_2} p_3^{x_3} \ldots p_\nu^{x_\nu} (\mathrm{M}_1 e^{m_1 x_1} + \mathrm{M}_2 e^{m_2 x_1} + \ldots + \mathrm{M}_\mu e^{m_\mu x_1})\right].$$

Il faut encore transformer cette expression au moyen de fonctions symétriques des racines m; pour cela, posons

$$(89)\qquad e^{m x_1} = \mathrm{Z}_1 + \mathrm{Z}_2 m + \mathrm{Z}_2 m^2 + \ldots + \mathrm{Z}_\mu m^{\mu-1},$$

en donnant à m les μ valeurs qui satisfont à l'équation caractéristique (86), nous obtenons μ équations linéaires au moyen desquelles nous tirons la valeur de l'une des fonctions z,

$$(90)\qquad \mathrm{Z}_\lambda = \frac{\mathrm{D}(m_1^0 m_2^1 \ldots m_{\lambda-1}^{\lambda-2} e^{m_\lambda x_1} m_{\lambda+1}^{\lambda} \ldots m_\mu^{\mu-1})}{\mathrm{D}(m_1^0 \ldots m_\lambda^{\lambda-1} \ldots m_\mu^{\mu-1})}.$$

D'après ce que nous avons vu à propos des différences, l'expression (88) se transforme également en celle-ci

$$(91)\quad w = \mathrm{S}(p_2^{x_2} \ldots p_\nu^{x_\nu} \mathrm{P}_1 \mathrm{Z}_1) + \mathrm{S}(p_2^{x_2} \ldots p_\nu^{x_\nu} \mathrm{P}_2 \mathrm{Z}_2) + \ldots + \mathrm{S}(p_2^{x_2} \ldots p_\nu^{x_\nu} \mathrm{P}_\mu \mathrm{Z}_\mu)$$

les quantités arbitraires $p_2, p_3, \ldots, p_\nu$ pouvant prendre des valeurs différentes dans chacune des sommes indéfinies S, et $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_\mu$ étant de nouvelles constantes d'intégration.

La formule (91) permet d'obtenir une autre expression contenant des fonctions arbitraires. En effet, les quantités Z, qui sont des fonctions de $p_2, p_3, \ldots, p_\nu$, peuvent être développées par rapport aux puissances de ces quantités; en faisant usage de la formule de Maclaurin, étendue à plusieurs variables et donnant à $p_2, p_3, \ldots, p_\nu$ la valeur 1 après les différentiations, on obtient pour l'une des sommes précédentes

$$(91)'\qquad \mathrm{Agr}\left[\frac{p_2^{\sigma_2} \ldots p_\nu^{\sigma_\nu}}{1^{\sigma_2|1} \ldots 1^{\sigma_\nu|1}} \left(\frac{d^\varpi \mathrm{Z}_\nu}{dp_2^{\sigma_2} \ldots dp_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 \mathrm{S}(p_2^{x_2} \ldots p_\nu^{x_\nu} \mathrm{P}_\lambda)\right],$$

avec la condition

$$\sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_\nu = \varpi$$

ou, en faisant θ égal à l'inverse du produit des factorielles, cette expression s'écrit

$$(91)'' \qquad \mathrm{Agr}\left[\theta\left(\frac{d^{\varpi} Z}{dp_2^{\sigma_2}\ldots dp_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 \mathrm{S}(p_2^{x_2+\sigma_2}\ldots p_\nu^{x_\nu+\sigma_\nu} P_\lambda)\right].$$

Or la somme S représente, à cause des quantités arbitraires p_2, p_3, ..., p_ν, une fonction arbitraire des quantités $x_2+\sigma_2$, $x_3+\sigma_3$, ..., $x_\nu+\sigma_\nu$, et l'agrégat est une intégrale; on a donc, pour l'expression définitive de la fonction ϖ,

$$(92) \quad \left\{\begin{aligned} \varpi = &\sum\left[\theta\left(\frac{d^{\varpi} Z_1}{dp_2^{\sigma_2}\ldots dp_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 f_1(x_2+\sigma_2, \ldots, x_\nu+\sigma_\nu)\right] \\ &+\sum\left[\theta\left(\frac{d^{\varpi} Z_2}{dp_2^{\sigma_2}\ldots dp_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 f_2(x_2+\sigma_2, \ldots, x_\nu+\sigma_\nu)\right] \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\sum\left[\theta\left(\frac{d^{\varpi} Z_\mu}{dp_2^{\sigma_2}\ldots dp_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 f_\mu(x_2+\sigma_2, \ldots, x_\nu+\sigma_\nu)\right]. \end{aligned}\right.$$

Σ est la somme de tous les termes que l'on obtient en faisant varier ϖ de zéro à $+\infty$; les intégrales indéfinies Σ peuvent même être considérées comme prises entre les limites $-\infty$ et $+\infty$, à cause de la valeur nulle de θ pour les valeurs négatives de σ.

Ici se présente un inconvénient, quand on fait $p=0$, le logarithme devient infini de sorte que le calcul des fonctions Z conduit généralement à des quantités de forme infinie, quoique le résultat final représente des quantités finies; il y a analogie entre ces quantités infinies et les sommes d'imaginaires qui, cependant, peuvent représenter des quantités réelles. Il faut donc recourir à des transformations qui fassent disparaître toutes difficultés; on voit de suite qu'en développant les fonctions Z par rapport aux puissances des quantités p_2-1, p_3-1, ... et faisant ensuite p_2, p_3, ... égaux à l'unité, les logarithmes seront nuls. Effectuons ce calcul; au lieu de $(91)'$, on aura

$$(91)_1 \qquad \mathrm{Agr}\left[\frac{(p_2-1)^{\varsigma_2}\ldots(p_\nu-1)^{\varsigma_\nu}}{1^{\varsigma_2|1}\ldots 1^{\varsigma_\nu|1}}\left(\frac{d^{\zeta} Z_\lambda}{dp_2^{\varsigma_2}\ldots dp_\nu^{\varsigma_\nu}}\right)_1 \mathrm{S}(p_2^{x_2}\ldots p_\nu^{x_\nu} P_\lambda)\right]$$

avec

$$\varsigma_1+\varsigma_2+\ldots+\varsigma_\nu=\zeta,$$

et pour faire entrer les puissances de p_2, p_3, ... dans la somme S, il

faudra développer les produits $(p_2 - 1)^{\varsigma_2} \ldots (p_\nu - 1)^{\varsigma_\nu}$ et ordonner de nouveau par rapport aux puissances de $p_2, p_3, \ldots$. Or, d'après la formule du binôme,

$$(p-1)^{\varsigma} = \operatorname{Agr}\left[(-1)^{\rho} \frac{\varsigma^{\rho|-1}}{1^{\rho|1}} p^{\varsigma-\rho}\right],$$

par suite

$$(p_2-1)^{\varsigma_2} \ldots (p_\nu - 1)^{\varsigma_\nu} = \operatorname{Agr}\left[(-1)^{\tau} \frac{\varsigma_2^{\rho_2|-1} \ldots \varsigma_\nu^{\rho_\nu|-1}}{1^{\rho_2|1} \ldots 1^{\rho_\nu|1}} p_2^{\varsigma_2-\rho_2} \ldots p_\nu^{\varsigma_\nu-\rho_\nu}\right],$$

en faisant

$$\rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_\nu = \tau,$$

ρ_2 varie de zéro à ς_2, ρ_3 de zéro à ς_3, etc.; mais, à cause des factorielles, on peut supposer que les quantités ρ varient de zéro à $+\infty$. Posons

$$\sigma = \varsigma - \rho$$

ou

$$\varsigma = \rho + \sigma,$$

le terme général de l'agrégat devient

$$(-1)^{\tau} \frac{(\rho_2+\sigma_2)^{\rho_2|-1} \ldots (\rho_\nu + \sigma_\nu)^{\rho_\nu|-1}}{1^{\rho_2|1} \ldots 1^{\rho_\nu|1}},$$

et ρ peut varier de zéro à $+\infty$; par suite, l'agrégat (91), peut s'écrire

$$\operatorname{Agr}\left\{\frac{p^{\sigma_2} \ldots p^{\sigma_\nu}}{1^{\rho_2+\sigma_2|1} \ldots 1^{\rho_\nu+\sigma_\nu|1}} \operatorname{Agr}\left[(-1)^{\tau} \frac{(\rho_2+\sigma_2)^{\rho_2|-1} \ldots (\rho_\nu+\sigma_\nu)^{\rho_\nu|-1}}{1^{\rho_2|1} \ldots 1^{\rho_\nu|1}} \times \left(\frac{d^{\tau+\varpi} Z_\lambda}{dp_2^{\rho_2+\sigma_2} \ldots dp_\nu^{\rho_\nu+\sigma_\nu}}\right)_1\right] S(p_2^{x_2} \ldots p_\nu^{x_\nu} P_\lambda)\right\};$$

ou, comme les agrégats ne sont ici que des intégrales, on a à la place de $(91)''$

$$(91)_2 \quad \left\{ \sum_{\varpi} \left\{ \sum_{\tau} (-1)^{\tau} \left[\frac{(\rho_2+\sigma_2)^{\rho_2|-1} \ldots (\rho_\nu+\sigma_\nu)^{\rho_\nu|-1}}{1^{\rho_2|1} \ldots 1^{\rho_\nu|1} . 1^{\rho_2+\sigma_2|1} \ldots 1^{\rho_\nu+\sigma_\nu|1}} \times \left(\frac{d^{\tau+\varpi} Z_\lambda}{dp_2^{\rho_2+\sigma_2} \ldots dp_\nu^{\rho_\nu+\sigma_\nu}}\right)_1 \right] S(p_2^{x_2+\sigma_2} \ldots p_\nu^{x_\nu+\sigma_\nu} P_\lambda) \right\} \right.,$$

avec

$$(91)_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_\nu = \tau, \\ \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_\nu = \varpi, \end{array} \right.$$

τ et ϖ variant de zéro à $+\infty$; la première somme est prise par rapport à l'indice variable ϖ, et la seconde par rapport à l'indice variable τ.

Comme vérification, si les $\nu - 1$ quantités arbitraires p se réduisent à une seule, on a, comme coefficient de la dérivée de Z_λ sous le signe Σ,

$$(-1)^\rho \frac{(\rho+\sigma)^{\rho|-1}}{1^{\rho|1} \cdot 1^{\rho+\sigma|1}};$$

d'un autre côté, on trouverait directement, pour ce même coefficient,

$$(-1)^\rho \frac{(\rho+\sigma)^{\sigma|-1}}{1^{\sigma|1} \cdot 1^{\rho+\sigma|1}};$$

supposons que σ soit égal à $\rho + \eta$, on aura

$$\frac{(\rho+\sigma)^{\sigma|-1}}{1^{\sigma|1}} = \frac{(\rho+\sigma)^{\rho+\eta|1}}{1^{\rho+\eta|1}},$$

ou

$$\frac{(\rho+\sigma)^{\rho|-1}\sigma^{\eta|-1}}{1^{\rho|1}(\rho+1)^{\eta|1}},$$

ou

$$\frac{(\rho+\sigma)^{\rho|-1}(\rho+1)^{\eta|1}}{1^{\rho|1}(\rho+1)^{\eta|1}},$$

ce qui conduit à l'identité des deux expressions précédentes.

Les fonctions Z sont des fonctions symétriques des racines de l'équation caractéristique : il est donc possible de les calculer sans résoudre cette équation. A cet effet, développons l'exponentielle e^{mx} ; nous avons

$$e^{mx} = 1 + \frac{mx}{1} + \frac{m^2x^2}{1^{2|1}} + \frac{m^3x^3}{1^{3|1}} + \dots,$$

et remplaçant cette exponentielle, dans le déterminant (90), par cette expression, il vient

$$Z_\lambda = \frac{x^{\lambda-1}}{1^{\lambda-1|1}} + \frac{D(m_1^0 \dots m_\lambda^\mu \dots m_\mu^{\mu-1})}{N} \frac{x^\mu}{1^{\mu|1}} + \frac{D(m_1^0 \dots m_\lambda^{\mu+1} \dots m_\mu^{\mu-1})}{N} \frac{x^{\mu+1}}{1^{\mu+1|1}} + \dots.$$

Représentons les coefficients de ce développement par $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$, nous aurons alors

$$(93) \qquad Z_\lambda = \frac{x^{\lambda-1}}{1^{\lambda-1|1}} + Q_1 \frac{x^\mu}{1^{\mu|1}} + Q_2 \frac{x^{\mu+1}}{1^{\mu+1|1}} + Q_3 \frac{x^{\mu+2}}{1^{\mu+2|1}} + \dots,$$

et, d'après un théorème sur les fonctions aleph que nous avons déjà énoncé précédemment, (38)' et (46)', on a

$$(94)\qquad C_\mu Q_\xi = \aleph(\xi)C_\lambda + \aleph(\xi+1)C_{\lambda+1} + \ldots + \aleph(\xi+\mu-\lambda)C_\mu.$$

En particulier,

$$(94)'\qquad \begin{cases} C_\mu Q_1 = \aleph(1)C_\lambda + \aleph(2)C_{\lambda+1} + \ldots + \aleph(1+\mu-\lambda)C_\mu, \\ C_\mu Q_2 = \aleph(2)C_\lambda + \aleph(3)C_{\lambda+1} + \ldots + \aleph(2+\mu-\lambda)C_\mu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Telles sont, (93) et (94), les formules qui permettent d'obtenir les fonctions Z.

Pour terminer, il nous reste à indiquer comment on peut obtenir les dérivées des fonctions Z par rapport aux quantités p; cette opération se réduit, en dernier lieu, à prendre les dérivées des coefficients de l'équation caractéristique, puisque les fonctions aleph, dont sont composées les quantités Z, sont elles-mêmes formées au moyen des coefficients de l'équation, comme l'indique la formule (83).

Prenons d'abord la dérivée d'ordre ρ de Lp, on a

$$(95)\qquad \frac{d^\rho Lp}{dp^\rho} = (-1)^{\rho-1}\frac{1^{\rho-1|1}}{p^\rho}.$$

Cherchons ensuite la dérivée de la puissance η de Lp. Pour cela, remarquons qu'il s'agit de trouver la dérivée d'une fonction de fonction; soit y une fonction de x et $f(y)$ la fonction dont nous cherchons la dérivée d'ordre ρ; nous avons, d'après Wronski (*Technie,* seconde section) [1],

$$(96)\qquad \frac{d^\rho F(y)}{dx^\rho} = 1^{\rho|1}\sum_\rho\left[\frac{d^\alpha F(y)}{dy^\alpha}\,\frac{A(\rho-\alpha,\alpha)}{1^{\alpha|1}}\right],$$

la somme Σ s'étendant de 1 à ρ, pour les valeurs entières que l'on peut

(1) Nous ne pouvons reproduire ici la démonstration de cette formule importante. Nous nous proposons de la donner prochainement avec celles que nous avons dû omettre.

donner à l'indice α; on a de plus

$$(96)' \qquad A(\rho-\alpha,\alpha) = \operatorname{Agr}\left(\frac{\dfrac{d^{r_1}y}{dx^{r_1}}\,\dfrac{d^{r_2}y}{dx^{r_2}}\cdots\dfrac{d^{r_\alpha}y}{dx^{r_\alpha}}}{1^{r_1|1}\,1^{r_2|1}\cdots 1^{r_\alpha|1}}\right),$$

avec

$$(96)'' \qquad r_1+r_2+\ldots+r_\alpha=\rho,$$

les indices r_1, r_2, ... étant au moins égaux à l'unité.

Faisons $F(y)=y^\eta$, $y=Lp$ et $x=p$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{d^\rho(Lp)^\eta}{dp^\rho} &= \eta^{\rho|-1}(Lp)^{\eta-\rho}A(0,\rho)\\ &+\frac{1^{\rho|1}}{1^{\rho-1|1}}\eta^{\rho-1|-1}(Lp)^{\eta-\rho+1}A(1,\rho-1)+\ldots\\ &+\frac{1^{\rho|1}}{1^{1|1}}\eta^{1|-1}(Lp)^{\eta-1}A(\rho-1,1),\end{aligned}$$

ou, en conservant la forme (96),

$$(96)_1 \qquad \frac{d^\rho(Lp)^\eta}{dp^\rho} = 1^{\rho|1}\sum\nolimits_\rho\left[\frac{\eta^{\rho-\alpha|-1}}{1^{\rho-\alpha|1}}(Lp)^{\eta-\rho+\alpha}A(\alpha,\rho-\alpha)\right].$$

Si l'on a maintenant à différentier le produit des logarithmes qui entre dans l'expression (87) du coefficient $C_{\mu-\lambda}$, il vient

$$(96)_2 \qquad \frac{d^\tau(Lp_2)^{\sigma_2}\ldots(Lp_\nu)^{\sigma_\nu}}{dp_2^{\rho_2}\ldots dp_\nu^{\rho_\nu}} = 1^{\rho_2|1}\ldots 1^{\rho_\nu|1}\sum\nolimits_{\rho_2}\ldots\sum\nolimits_{\rho_\nu},$$

en mettant, pour simplifier, les caractéristiques $\sum_\rho$ des sommes précédentes à la place de ces sommes elles-mêmes.

Dans le cas où l'on fait $p=1$ après la différentiation, le résultat se simplifie; la dérivée $(96)_1$ est nulle, si $\rho<\eta$, puisque le logarithme est nul pour $p=1$. Si $\rho=\eta$, nous avons

$$\left[\frac{d^\eta(Lp)^\eta}{dp^\eta}\right]_1 = \eta^{\eta|-1}A(0,\eta);$$

et nous pouvons remplacer la factorielle $\eta^{\eta|-1}$ par $1^{\eta|1}$, qui est identique.

En dernier lieu, supposons $\rho = \eta + \alpha$; le développement se réduit encore à un seul terme pour $p = 1$,

$$\left[\frac{d^{\eta+\alpha}(\mathrm{L}p)^{\eta}}{dp^{\eta+\alpha}}\right]_1 = 1^{\eta+\alpha|1}\,\mathrm{A}(\alpha, \eta);$$

quant à l'agrégat, d'après (96)', il est

$$\mathrm{A}(\alpha, \eta) = \mathrm{Agr}\left[\frac{(-1)^{r_1-1}\,1^{r_1-1|1}\,(-1)^{r_2-1}\,1^{r_2-1|1}\ldots(-1)^{r_\eta-1}\,1^{r_\eta-1|1}}{1^{r_1|1}\,1^{r_2|1}\ldots 1^{r_\eta|1}}\right],$$

et réduisant, en tenant compte de (96)'', il vient

$$\mathrm{A}(\alpha, \eta) = \mathrm{Agr}\left[\frac{(-1)^{\alpha}}{r_1 r_2 \ldots r_\eta}\right].$$

Nous avons donc

$$(97) \qquad \left[\frac{d^{\eta+\alpha}(\mathrm{L}p)^{\eta}}{dp^{\eta+\alpha}}\right]_1 = 1^{\eta+\alpha|1}(-1)^{\alpha}\,\mathrm{Agr}\left(\frac{1}{r_1 r_2 \ldots r_\eta}\right),$$

avec

$$(97)' \qquad r_1 + r_2 + \ldots + r_\eta = \alpha + \eta,$$

les quantités r_1, r_2, ... étant des nombres entiers positifs, et ne pouvant être nulles.

Considérons maintenant le produit

$$(\mathrm{L}p_2)^{\sigma_2}(\mathrm{L}p_3)^{\sigma_3}\ldots(\mathrm{L}p_\nu)^{\sigma_\nu}$$

qui entre dans l'expression (87) des coefficients de l'équation caractéristique. D'après ce qui précède, les dérivées de ce produit seront nulles, si l'ordre de chacune des dérivées partielles n'est pas au moins égal respectivement à σ_2, σ_3, ..., quantités qui composent (87)', et si l'on fait, après les différentiations, $p_2 = p_3 = \ldots = 1$; nous devons donc supposer que les ordres de dérivations partielles sont respectivement $\sigma_2 + \rho_2$, $\sigma_3 + \rho_3$, ..., et comme on a, d'après (87)',

$$(98) \qquad \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_\nu = \tau;$$

nous représenterons la somme des indices ρ par ϖ

$$(98)' \qquad \rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_\nu = \varpi;$$

nous aurons ainsi

$$\left[\frac{d^{\tau+\varpi}(\mathrm{L}p_2)^{\sigma_2}\ldots(\mathrm{L}p_\nu)^{\sigma_\nu}}{dp_2^{\sigma_2+\rho_2}\ldots dp_\nu^{\sigma_\nu+\rho_\nu}}\right]_1 = (-1)^\varpi\, 1^{\sigma_2+\rho_2|1}\ldots 1^{\sigma_\nu+\rho_\nu|1}$$
$$\times \operatorname{Agr}\left(\frac{1}{r_{2,1}r_{2,2}\ldots r_{2,\sigma_2}}\right)\cdots \operatorname{Agr}\left(\frac{1}{r_{\nu,1}r_{\nu,2}\ldots r_{\nu,\sigma_\nu}}\right),$$

avec

$$(98)'' \quad \left\{\begin{array}{l} r_{2,1} + r_{2,2} + \ldots + r_{2,\sigma_2} = \sigma_2 + \rho_2, \\ r_{3,1} + r_{3,2} + \ldots + r_{3,\sigma_3} = \sigma_3 + \rho_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ r_{\nu,1} + r_{\nu,2} + \ldots + r_{\nu,\sigma_\nu} = \sigma_\nu + \rho_\nu. \end{array}\right.$$

Représentons le produit des factorielles par $\Pi(1^{\sigma+\rho|1})$, celui des agrégats par $\Pi[\operatorname{Agr}]$; nous aurons définitivement pour la dérivée d'un coefficient $C_{\mu-\lambda}$ de l'équation caractéristique (86)

$$(99) \quad \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{d^{\tau+\varpi}C_{\mu-\lambda}}{dp_2^{\sigma_2+\rho_2}\ldots dp_\nu^{\sigma_\nu+\rho_\nu}}\right)_1 \\ \qquad = \operatorname{Agr}^\lambda\left\{(-1)^\varpi\,\Pi(1^{\sigma+\rho|1})\,\Pi\left[\operatorname{Agr}\left(\dfrac{1}{r_1\ldots r_\sigma}\right)\right]A(\mu-\lambda, \sigma_2\ldots\sigma_\nu)\right\}, \end{array}\right.$$

avec les conditions (98), (98)', (98)''. τ est compris entre zéro et λ pour le premier agrégat, et si $\tau + \varpi$ est plus petit que λ, les termes de cet agrégat qui correspondent aux valeurs de $\tau + \varpi$ supérieures à celle qui est donnée sont nuls.

Il faut remarquer que l'on n'a pas à tenir compte du premier agrégat de (99), $\operatorname{Agr}^\lambda$, si l'on a calculé les dérivées des coefficients de l'équation caractéristique dont les indices sont supérieurs à $\mu - \lambda$, parce que les termes calculés ainsi se reproduisent dans $C_{\mu-\lambda}$, en ayant soin toutefois de mettre dans les coefficients de l'équation différentielle l'indice $\mu - \lambda$ au lieu des indices supérieurs, c'est-à-dire que, si l'on a calculé $C_{\mu-\lambda+1}$, le coefficient $C_{\mu-\lambda}$ contiendra, outre les nouveaux termes,

tous les termes qui entrent dans $C_{\mu-\lambda+1}$, pourvu que l'on change, dans

$$A(\mu-\lambda+1, \sigma_2 \ldots \sigma_\nu),$$

l'indice $\mu-\lambda+1$ en $\mu-\lambda$.

Exemple. — Par exemple, considérons l'équation

$$C_2 m^2 + C_1 m + C_0 = 0;$$

sans répéter un calcul que nous avons fait plus haut, nous trouvons

$$\begin{aligned}
C_2 &= A(2,0,0),\\
C_1 &= A(1,0,0) + Lp_2 A(1,1,0) + Lp_3 A(1,0,1),\\
C_0 &= A(0,0,0) + Lp_2 A(0,1,0) + Lp_3 A(0,0,1)\\
&\quad + (Lp_2)^2 A(0,2,0) + Lp_2 Lp_3 A(0,1,1) + (Lp_3)^2 A(0,0,2).
\end{aligned}$$

Les dérivées de C_2 sont nulles; pour celles de C_1, la formule (99) se réduit à (95) en y joignant le coefficient $A(1,1,0)$, ou $A(1,0,1)$; on trouve

$$\left(\frac{dC_1}{dp_2}\right)_1 = A(1,1,0), \quad \left(\frac{d^2 C_1}{dp_2^2}\right)_1 = -A(1,1,0),$$
$$\left(\frac{d^3 C_1}{dp_2^3}\right)_1 = 2A(1,1,0), \quad \left(\frac{d^4 C_1}{dp_2^4}\right)_1 = -6A(1,1,0),$$

et ainsi de suite. Pour les dérivées de C_0 par rapport à p_2 ou à p_3 seulement, la formule (99) se réduit à (97) avec un coefficient convenable, en ajoutant les termes que nous venons de calculer. Examinons ce que donne la formule (99), pour la première dérivée par rapport à p_2, on a

$$\sigma_2 = \tau = 1, \quad \rho_2 = \varpi = 0 \quad \text{et} \quad r_{2,1} = 1;$$

comme $\lambda = 2$, Agr^λ se réduit à un seul terme

$$\left(\frac{dC_0}{dp_2}\right)_1 = (-1)^0 1^{1|1} \mathrm{Agr}\left(\frac{1}{1}\right) A(0,1,0) = A(0,1,0).$$

Comme nous l'avons dit, ce terme se déduirait de la dérivée de C_1 en changeant $A(1,1,0)$ en $A(0,1,0)$.

Pour la seconde dérivée de C_0 par rapport à p_2, on a $\tau + \varpi = 2$; or dans Agr^λ, $\lambda = 2$, τ peut prendre les valeurs 1 ou 2, avec $\varpi = 1$ ou 0, et, puisque nous avons calculé la première dérivée de C_0, il suffit de supposer $\tau = 2$, $\varpi = 0$ et de négliger Agr^λ, ce qui nous donne pour l'ensemble des termes

$$\left(\frac{d^2 C_0}{dp_2^2}\right)_1 = (-1)^0 1^{2|1} \mathrm{Agr}\left(\frac{1}{1.1}\right) A(0, 2, 0) - A(0, 1, 0)$$
$$= 2A(0, 2, 0) - A(0, 1, 0).$$

En opérant de même pour la dérivée troisième, on a $\tau + \varpi = 3$ et

$$\sigma_2 = \tau = 2, \quad \rho_2 = \varpi = 1, \quad r_{2,1} + r_{2,2} = \sigma_2 + \rho_2,$$

ce qui conduit à

$$r_{2,1} = 2, \quad r_{2,2} = 1,$$
$$r_{2,1} = 1, \quad r_{2,2} = 2,$$

d'où

$$\left(\frac{d^3 C_0}{dp_2^3}\right)_1 = (-1)^1 1^{3|1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) A(0, 2, 0) + 2A(0, 1, 0)$$
$$= -6A(0, 2, 0) + 2A(0, 1, 0).$$

Pour la double dérivée par rapport à p_2 et à p_3, on a

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 1, \quad \tau = 2, \quad \varpi = 0, \quad r_{2,1} = 1, \quad r_{3,1} = 1,$$
$$\left(\frac{d^2 C_0}{dp_2\, dp_3}\right)_1 = (-1)^0 1^{1|1}.1^{1|1} \mathrm{Agr}\left(\frac{1}{1}\right) \cdot \mathrm{Agr}\left(\frac{1}{1}\right) A(0, 1, 1) = A(0, 1, 1).$$

Pour la dérivée troisième par rapport à p_2 et p_3, on a

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 1, \quad \tau = 2, \quad \rho_2 = 1, \quad \rho_3 = 0, \quad \varpi = 1,$$
$$r_{2,1} = 1, \quad r_{2,2} = 1, \quad r_{3,1} = 1,$$
$$\left(\frac{d^3 C_0}{dp_2^2\, dp_3}\right)_1 = (-1)^1 1^{1|1}.1^{1|1} \mathrm{Agr}\left(\frac{1}{1.1}\right) \cdot \mathrm{Agr}\left(\frac{1}{1}\right) A(0, 1, 1) = -A(0, 1, 1).$$

On voit ainsi comment on doit appliquer la formule (99).

En résumé, l'intégration de l'équation (85), aux dérivées partielles, linéaires et à coefficients constants, est donnée par les formules (87), (87)' pour ce qui concerne la formation des coefficients de l'équation

caractéristique (86); (98), (98)′, (98)″, (99) pour les dérivées des coefficients de cette équation; enfin les formules (93), (94) donnent les fonctions Z qui entrent dans l'expression (92) de la fonction cherchée w, expression dans laquelle nous avons ensuite substitué des sommes de la forme $(91)_2$.

Intégrale générale de l'équation proposée. — Il est possible d'effectuer maintenant, sans difficulté, tous les calculs relatifs à l'intégration des équations linéaires à coefficients constants et aux dérivées partielles, et cette intégration conduit à celle des équations à coefficients quelconques en donnant les quantités qui entrent dans l'expression (68). Pour cela, il ne reste plus qu'à former les dérivées partielles de w par rapport aux variables x_1, x_2, x_3, ... pour former ensuite les fonctions $\varphi(w)$ et $F(w)$, ainsi que leurs propres dérivées par rapport aux mêmes variables; ces dérivées seront données, pour la variable principale x_1, par les dérivées des développements (93), et pour les autres variables x_2, x_3, ... par les dérivées des fonctions arbitraires f_1, f_2, ... Ces calculs n'offrent donc aucune particularité.

Cependant il convient de ne calculer ainsi que les dérivées partielles jusqu'à l'ordre μ inclusivement; pour les dérivées d'ordres supérieurs, on prendra les différentielles totales de l'équation proposée et, à partir des ordres $\mu + 1$, $\mu + 2$, ..., les relations que l'on en déduira permettront de déterminer les dérivées partielles au moyen de relations du premier degré, comme nous l'avons indiqué à l'occasion des équations aux différences partielles. L'expression (68) donne, d'après cela, l'intégrale générale de l'équation proposée; elle contient μ fonctions arbitraires, lesquelles peuvent se réduire à

$$\frac{(\mu + 1)^{\nu|1}}{1^{\nu|1}} - 1$$

constantes arbitraires au plus, valeurs initiales de la fonction inconnue et de ses dérivées partielles.

Il est inutile d'ajouter que, pour avoir les différences ou les dérivées de l'inconnue, on pourra disposer de la fonction arbitraire $F(y)$ en l'égalant à ces différences ou à ces dérivées, ainsi que nous l'avons déjà montré.

Ainsi, d'après ce qui précède, non seulement on conçoit la possibilité d'intégrer toutes sortes d'équations aux différences ou aux dérivées partielles, mais encore on peut toujours effectuer les calculs nécessaires. Le seul inconvénient qui pourra se présenter sera dû à la longueur des calculs, et l'on se rend compte que, dans bien des cas, il sera impossible d'en éviter la complication ; il existe évidemment un nombre de simplifications au delà duquel on ne peut en introduire de nouvelles. Au grand nombre d'opérations qu'il faut effectuer successivement pour obtenir une intégration d'un ordre élevé viendront s'ajouter les transformations auxquelles il faudra recourir quand les développements ne présenteront pas une convergence suffisante. Les moyens à employer dans ce cas sont ceux que nous avons déjà indiqués.

Détermination des fonctions arbitraires. — Il reste encore à déterminer les fonctions arbitraires. Si l'on a bien saisi ce que nous avons dit plus haut de la détermination des constantes arbitraires, on voit qu'il convient de prendre encore pour point de départ le système des valeurs initiales des diverses quantités variables qui entrent dans la question; la valeur de l'inconnue y se réduit alors à sa valeur fondamentale ϖ, ce qui produit une notable simplification.

Cependant on pourrait être conduit à opérer autrement; nous avons déjà traité la question. Dans l'exemple que nous allons donner, nous indiquerons en détail la marche à suivre, le cas étant assez compliqué.

En donnant donc à la variable principale x_1 sa valeur initiale, on a, d'une part, l'expression de la fonction inconnue au moyen des fonctions arbitraires, et de l'autre, on a, d'après le problème lui-même, une fonction des variables secondaires x_2, x_3, ... qui est donnée par l'état initial, d'où une première relation entre cette fonction et l'expression initiale de la fonction inconnue. On obtiendra ensuite d'autres relations analogues, en nombre suffisant, au moyen des différences ou des dérivées de la fonction inconnue et de nouvelles fonctions qui seront aussi données par l'état initial de ces différences ou de ces dérivées. De cette manière toutes les fonctions arbitraires seront susceptibles d'être déterminées au moyen d'équations primitives, c'est-à-dire par des équations qui ne nécessitent aucune intégration, ce qui est visible si l'on se reporte à la forme des intégrales des équations linéaires à coefficients constants qui forment généralement les équations réduites.

Les fonctions arbitraires une fois déterminées, on peut effectuer le calcul des valeurs de la fonction inconnue : l'état initial est choisi pour fixer les valeurs moyennes des variables; mais, si, pour calculer des valeurs un peu éloignées des valeurs moyennes primitivement considérées, on trouve avantageux de changer ces valeurs moyennes, on prendra, parmi les valeurs pour lesquelles la fonction inconnue est déjà calculée, l'une d'elles choisie convenablement, laquelle sera prise pour nouvelle valeur initiale et servira alors comme nouvelle valeur moyenne après avoir déterminé les nouvelles fonctions arbitraires. Il est bien clair qu'en opérant ainsi de proche en proche il sera possible de calculer toutes les valeurs de la fonction inconnue que l'on voudra déterminer.

Pour préciser ce que nous venons de dire, nous allons intégrer l'équation principale d'un problème bien connu, celle qui représente le mouvement vibratoire des ondes sonores, en prenant pour valeur fondamentale la solution généralement donnée dans les Traités de Mécanique. Nous croyons cet exemple très propre à lever les difficultés qui pourraient se présenter dans les applications des nouveaux calculs.

Sixième exemple. — *Du mouvement vibratoire des fluides élastiques.*

Équations du problème. — Nous allons établir l'équation des mouvements vibratoires des fluides élastiques, en suivant la marche indiquée par M. Resal dans son *Traité de Mécanique*.

Soient p, p_0 les presssions et ρ, ρ_0 les densités correspondantes d'une même masse de gaz, sous des volumes différents; soient x, y, z les coordonnées d'un point du fluide à l'époque t; f la fonction des vitesses définie par la relation

$$df = u\,dx + v\,dy + w\,dz,$$

où u, v, w sont les composantes de la vitesse du point considéré, c'est-à-dire

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}.$$

Soit enfin U le potentiel, dont nous n'aurons pas à tenir compte,

puisque nous supposerons nulle l'action des forces extérieures; on a, pour équation du mouvement des fluides,

$$(\alpha) \qquad \frac{dp}{\rho} = dU - d\frac{df}{dt} - \frac{1}{2}d\left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2\right].$$

D'un autre côté, en supposant que le fluide ne reçoive aucune chaleur des corps environnants, ou ne leur en communique pas; on a entre la pression et la densité la relation

$$(\alpha)' \qquad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{c}{c'}}.$$

c et c' sont les chaleurs spécifiques à pression et à volume constants, dont le rapport est supposé constant pour un même gaz.

Posons

$$\rho = \rho_0(1+\gamma),$$

γ étant la condensation positive ou négative; en introduisant cette nouvelle variable dans la relation précédente, on a

$$\frac{p}{p_0} = (1+\gamma)^{\frac{c}{c'}};$$

puis différentiant, divisant par ρ et faisant

$$a^2 = \frac{c}{c'}\frac{p_0}{\rho_0},$$

il vient

$$(\beta) \qquad \frac{dp}{\rho} = a^2(1+\gamma)^{\frac{c}{c'}-1}\frac{d\gamma}{1+\gamma}.$$

En éliminant le rapport $\frac{dp}{\rho}$ entre les équations (α) et (β), sans tenir compte de U, comme nous l'avons dit, on obtient

$$(1+\gamma)^{\frac{c}{c'}-1}\frac{a^2}{1+\gamma}d\gamma = -d\frac{df}{dt} - \frac{1}{2}d\left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2\right].$$

Si l'on désigne par ξ une variable auxiliaire, cette relation donne,

en prenant les dérivées par rapport à cette variable,

$$(1+\gamma)^{\frac{c}{c'}-1}\frac{a^2}{1+\gamma}\frac{d\gamma}{d\xi} = -\frac{d^2f}{dt\,d\xi} - \frac{d^2f}{dx\,d\xi}\frac{df}{dx} - \frac{d^2f}{dy\,d\xi}\frac{df}{dy} - \frac{d^2f}{dz\,d\xi}\frac{df}{dz}.$$

Pour simplifier, représentons le second membre de cette équation par $F(\xi)$, nous aurons

$$(\gamma) \qquad \frac{d\gamma}{d\xi} = \frac{1+\gamma}{a^2}(1+\gamma)^{1-\frac{c}{c'}}F(\xi).$$

Nous avons encore à tenir compte d'une relation, celle qui exprime la condition de continuité du fluide,

$$(\delta) \qquad \frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho u}{dx} + \frac{d\rho v}{dy} + \frac{d\rho w}{dz} = 0;$$

cette relation donne, en remplaçant ρ et u, v, w par leurs valeurs, savoir, pour ces dernières :

$$u = \frac{df}{dx}, \quad v = \frac{df}{dy}, \quad w = \frac{df}{dz},$$

$$\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d\gamma}{dx}\frac{df}{dx} + \frac{d\gamma}{dy}\frac{df}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\frac{df}{dz} + (1+\gamma)\left(\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dy^2} + \frac{d^2f}{dz^2}\right) = 0.$$

Nous pouvons, au moyen de la relation (γ), éliminer les dérivées $\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dx}, \frac{d\gamma}{dy}, \frac{d\gamma}{dz}$, en donnant à la variable auxiliaire ξ les valeurs successives t, x, y, z; on obtiendra ainsi

$$\begin{aligned} &F(t) + F(x)\frac{df}{dx} + F(y)\frac{df}{dy} + F(z)\frac{df}{dz} \\ &\quad + a^2(1+\gamma)^{\frac{c}{c'}-1}\left(\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dy^2} + \frac{d^2f}{dz^2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Enfin, nous pouvons encore éliminer la fonction $1+\gamma$. Pour cela, en intégrant l'équation (γ), après avoir fait passer la variable γ dans le premier membre, si l'on fait $\xi = t$, on obtient

$$(\varepsilon) \qquad \frac{a^2}{\frac{c}{c'}-1}(1+\gamma)^{\frac{c}{c'}-1} = -\frac{df}{dt} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2\right];$$

la constante d'intégration peut être supposée contenue dans f, c'est pourquoi nous n'en tiendrons pas compte.

L'équation (ε) combinée avec la précédente donne définitivement

$$(\zeta)\quad \left\{\begin{aligned} & F(t) + F(x)\frac{df}{dx} + F(y)\frac{df}{dy} + F(z)\frac{df}{dz} \\ & \quad - \left(\frac{c}{c'} - 1\right)\left\{\frac{df}{dt} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2\right]\right\} \\ & \qquad\qquad \times \left(\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dy^2} + \frac{d^2f}{dz^2}\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

en n'oubliant pas que la fonction $F(\xi)$ est

$$(\zeta)'\qquad F(\xi) = -\frac{d^2f}{dt\,d\xi} - \frac{d^2f}{dx\,d\xi}\frac{df}{dx} - \frac{d^2f}{dy\,d\xi}\frac{df}{dy} - \frac{d^2f}{dz\,d\xi}\frac{df}{dz},$$

ξ représentant à volonté l'une des variables t, x, y, z.

Les deux équations du problème sont (ε) et (ζ) avec $(\zeta)'$; f et γ sont les deux fonctions inconnues, et t, x, y et z sont les quatre variables indépendantes.

Remarquons cependant que f n'est pas la véritable inconnue. Cette inconnue est la vitesse V d'une molécule gazeuse; elle a avec la fonction f une relation que nous allons rappeler. Le système des équations simultanées (ε) et (ζ) est tel que l'on peut intégrer séparément, d'abord, l'équation (ζ) par rapport à f ou V, et ensuite résoudre l'équation (ε) par rapport à γ.

Autre forme des équations du problème. — L'équation (ζ) est du second ordre aux dérivées partielles : elle doit nous occuper particulièrement; néanmoins, comme elle est susceptible de réductions importantes, nous n'entreprendrons pas son intégration sous la forme où elle se présente ici.

Les variables x, y et z entrant symétriquement dans l'équation (ζ), on peut les remplacer par leur expression en fonction du rayon vecteur r du point (x, y, z); on a, en effet,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \text{et} \quad u^2 + v^2 + w^2 = V^2;$$

d'où, en différentiant,

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = r\,dr;$$

$$u = \mathrm{V}\frac{x}{r}, \quad v = \mathrm{V}\frac{y}{r}, \quad w = \mathrm{V}\frac{z}{r},$$

et, comme

$$df = u\,dx + v\,dy + w\,dz,$$

on en déduit

$$(\eta) \qquad \frac{df}{dr} = \mathrm{V}.$$

On peut maintenant calculer les dérivées partielles de l'équation (ζ); en faisant usage des variables auxiliaires ξ et ξ', pour x, y et z, il vient

$$\frac{df}{d\xi} = \frac{df}{dr}\frac{\xi}{r},$$

$$\frac{d^2 f}{dt\,d\xi} = \frac{d^2 f}{dt\,dr}\frac{\xi}{r},$$

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = \frac{d^2 f}{dr^2}\frac{\xi^2}{r^2} + \frac{df}{dr}\frac{r^2-\xi^2}{r^3},$$

$$\frac{d^2 f}{d\xi\,d\xi'} = \frac{d^2 f}{dr^2}\frac{\xi\xi'}{r^2} - \frac{df}{dr}\frac{\xi\xi'}{r^3},$$

d'où les relations

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2 = \left(\frac{df}{dr}\right)^2,$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr};$$

et ensuite

$$\mathrm{F}(t) = -\frac{d^2 f}{dt^2} - \frac{d^2 f}{dt\,dr}\frac{df}{dr}.$$

Quant aux fonctions $\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{F}(y)$, $\mathrm{F}(z)$, on a, pour l'une d'elles,

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x) = -\frac{d^2 f}{dt\,dr}\frac{x}{r} &- \left(\frac{d^2 f}{dr^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{df}{dr}\frac{r^2-x^2}{r^3}\right)\frac{df}{dr}\frac{x}{r}\\ &- \left(\frac{d^2 f}{dr^2}\frac{y^2}{r^2} + \frac{df}{dr}\frac{r^2-y^2}{r^3}\right)\frac{df}{dr}\frac{y}{r}\\ &- \left(\frac{d^2 f}{dr^2}\frac{z^2}{r^2} + \frac{df}{dr}\frac{r^2-z^2}{r^3}\right)\frac{df}{dr}\frac{z}{r},\end{aligned}$$

et pour les autres il suffirait de changer d'abord x en y, puis x en z, dans le premier terme seulement ; par suite,

$$F(t) + F(x)\frac{df}{dx} + F(y)\frac{df}{dy} + F(z)\frac{df}{dz} = -\frac{d^2f}{dt^2} - 2\frac{d^2f}{dt\,dr}\frac{df}{dr} - \frac{d^2f}{dr^2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2,$$

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2\right] = \frac{df}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2.$$

En réunissant les quantités calculées pour l'équation (ζ), celle-ci devient

$$(\theta)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2f}{dt^2} + 2\frac{d^2f}{dt\,dr}\frac{df}{dr} + \frac{d^2f}{dr^2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{c}{c'} - 1\right)\left[\frac{df}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2\right]\left(\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr}\right) = 0; \end{aligned}\right.$$

quant à l'équation (ε), elle devient

$$(\theta)'\qquad \frac{a^2}{\frac{c}{c'} - 1}(1+\gamma)^{\frac{c}{c'}-1} + \frac{df}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2 = 0.$$

Telles sont, sous une seconde forme, les deux équations du problème.

Intégration des équations du problème. — 1° *Détermination des valeurs fondamentales.* — L'équation (θ) que nous allons maintenant intégrer ne contient que deux variables indépendantes t et r, et l'inconnue est f ; c'est l'équation que nous avons généralement représentée par

$$\varphi(y) = 0,$$

en mettant f à la place de y et de même ψ au lieu de w pour valeur fondamentale, puisque w représente une autre quantité dans le problème qui nous occupe, et aussi Φ au lieu de F, nous aurons pour

expression fondamentale, au lieu de (66) ou (68),

$$(\eta)\qquad \Phi(f) = \Phi(\psi) - \varphi(\psi)\frac{\left(\frac{d\Phi(\psi)}{d\psi}\right)}{\left(\frac{d\varphi(\psi)}{d\psi}\right)} + \ldots;$$

dans le cas présent, nous passerions de l'inconnue f à la vitesse V en faisant $\Phi(f)$ égal à $\frac{df}{dr}$.

Pour déterminer la valeur fondamentale ψ, formons l'équation transformée de la manière suivante, ainsi que nous l'avons déjà expliqué :

$$\frac{d^2f}{dt^2} + \omega\left[2\frac{d^2f}{dt\,dr}\frac{df}{dr} + \frac{d^2f}{dr^2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2\right] - \left\{\frac{1 - \frac{c}{c'}}{a^2}\left[\frac{df}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2\right]\right\}^{\omega} a^2\left(\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr}\right) = 0,$$

nous aurons pour équation réduite, en faisant $\omega = 0$,

$$(\iota)\qquad \frac{d^2\psi}{dt^2} - a^2\left(\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr}\right) = 0;$$

la quantité a^2 est celle que nous avons écrite plus haut pour $\frac{c}{c'}\frac{p_0}{\rho_0}$.

L'équation (ι) est du second ordre, linéaire et aux dérivées partielles; c'est à cette dernière équation approchée que parvient Poisson dans son *Traité de Mécanique*, t. II; aussi l'avons-nous choisie pour équation réduite; de son intégration nous déduirons la solution générale du problème.

Pour justifier la réduction que nous venons d'opérer sur l'équation (θ) en vue de parvenir à l'équation (ι), il suffit de rappeler la manière dont on établit directement cette dernière. On admet que, dans les mouvements vibratoires des gaz, la vitesse des molécules est très faible, par suite les carrés des composantes de la vitesse qui figurent dans l'équation (α) sont nuls, c'est-à-dire que l'on a très sensiblement

$$2\frac{d^2f}{dt\,dr}\frac{df}{dr} + \frac{d^2f}{dr^2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2 = 0.$$

On remplace aussi $(1+\gamma)^{\frac{c}{c'}-1}$ par l'unité; cette quantité en diffère ordinairement peu, parce que γ est une très petite quantité et que l'exposant $\frac{c}{c'}-1$ est inférieur à $\frac{1}{2}$ (pour l'air, il est 0,419); on a donc très sensiblement, d'après $(\theta)'$,

$$-\frac{\frac{c}{c'}-1}{a^2}\left[\frac{df}{dt}+\frac{1}{2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2\right]=1.$$

Il résulte de ceci que la valeur fondamentale ψ diffère très peu de la fonction f, inconnue du problème, du moins dans les conditions où l'on étudie habituellement les vibrations de l'air, par conséquent le développement de la fonction f doit être très rapidement convergent; il suffira donc de calculer le second terme de l'expression (ϑ).

L'équation (ι) peut s'écrire

$$r\frac{d^2\psi}{dt^2}=a^2\left(r\frac{d^2\psi}{dr^2}+2\frac{d\psi}{dr}\right);$$

sous cette forme on voit que le second membre est la dérivée, par rapport à r, de $\frac{d(r\psi)}{dr}$, et il vient

$$(\varkappa)\qquad \frac{d^2(r\psi)}{dt^2}=a^2\frac{d^2(r\psi)}{dr^2};$$

par suite, en désignant par F_1 et F_2 deux fonctions arbitraires, on a, comme cela est connu,

$$(\varkappa)'\qquad r\psi=F_1(r+at)+F_2(r-at);$$

mais il importe ici de déduire cette solution des formules que nous avons données. Prenons t pour variable principale : on verrait facilement, d'après (86), que l'équation caractéristique correspondant à l'équation $(\varkappa)$,

$$C_2m^2+C_1m+C_0=0,$$

a pour coefficients

$$C_2 = 1, \quad C_1 = 0, \quad C_0 = -a^2(\mathrm{L}p)^2;$$

par suite, ses racines sont égales et de signes contraires,

$$m_1 = a\mathrm{L}p, \quad m_2 = -a\mathrm{L}p.$$

Au lieu de former les fonctions Z_1, Z_2 et de les développer ensuite, il est plus simple ici de développer directement les exponentielles comme on le ferait pour les fonctions Z; on a ainsi

$$e^{\pm mt} = e^{\pm a\mathrm{L}\,pt} = p^{\pm at},$$

et, par suite,

$$r\psi = \sum\left[\frac{1}{1^{\sigma|1}}\left(\frac{d^\sigma p^{at}}{dp^\sigma}\right)_0 F_1(r+\sigma) + \frac{1}{1^{\sigma|1}}\left(\frac{d^\sigma p^{-at}}{dp^\sigma}\right)_0 F_2(r-\sigma)\right].$$

La quantité à différentier pour le premier terme entre crochets donne

$$\frac{d^\sigma p^{at}}{dp^\sigma} = at^{\sigma|-1} p^{at-\sigma};$$

pour le second, il suffirait de changer a en $-a$. Comme il faut faire ensuite $p = 0$, il est nécessaire que at soit égal à σ, afin que l'expression ne soit ni nulle ni infinie : le rapport

$$\frac{at^{\sigma|-1}}{1^{\sigma|1}}$$

est alors égal à l'unité, et l'on a pour $r\psi$ la valeur précédente donnée par $(\varkappa)'$. Dans la théorie des factorielles, les règles applicables aux exposants entiers sont généralement applicables aux exposants non entiers, comme dans le cas des exponentielles.

La formation des fonctions Z est aussi très simple, bien que le calcul de la fonction $r\psi$ par ce moyen soit un peu plus long que le précédent. On a

$$Z_1 = \frac{m_2 e^{m_1 t} - m_1 e^{m_2 t}}{m_2 - m_1}, \quad Z_2 = \frac{e^{m_2 t} - e^{m_1 t}}{m_2 - m_1},$$

ou bien, en mettant $+m$ et $-m$ au lieu de m_1 et m_2,

$$Z_1 = \frac{1}{2}(e^{mt} + e^{-mt}), \quad Z_2 = \frac{1}{2m}(e^{mt} - e^{-mt}),$$

autrement

$$(\lambda) \qquad Z_1 = \cos(at\mathrm{L}p), \quad Z_2 = \frac{\sin(at\mathrm{L}p)}{a\mathrm{L}p}.$$

On pourrait encore obtenir ce résultat d'une autre façon en exprimant les fonctions Z au moyen des fonctions aleph; en effet, d'après les formules (93), (94), on aurait

$$Z_1 = 1 + \aleph(2)\frac{t^2}{1^{2|1}} + \aleph(4)\frac{t^4}{1^{4|1}} + \cdots,$$

$$Z_2 = \frac{t}{1} + \aleph(2)\frac{t^3}{1^{3|1}} + \aleph(4)\frac{t^5}{1^{5|1}} + \cdots;$$

d'après les formules (49) et (49)′, ou (83) et (83)′, on aurait encore

$$\aleph(1) = 0, \quad \aleph(2) = a^2(\mathrm{L}p)^2, \quad \aleph(3) = 0, \quad \aleph(4) = a^4(\mathrm{L}p)^4, \quad \ldots,$$

ce qui donne

$$Z_1 = 1 + a^2(\mathrm{L}p)^2\frac{t^2}{1^{2|1}} + a^4(\mathrm{L}p)^4\frac{t^4}{1^{4|1}} + \cdots,$$

$$Z_2 = \frac{t}{1} + a^2(\mathrm{L}p)^2\frac{t^3}{1^{3|1}} + a^4(\mathrm{L}p)^4\frac{t^5}{1^{5|1}} + \cdots.$$

On voit que ces deux séries représentent le cosinus hyperbolique et le sinus hyperbolique divisé par $a\mathrm{L}p$, trouvés plus haut, (λ). D'après cela, nous obtenons pour la fonction $r\psi$ l'expression

$$r\psi = \sum\left[\frac{1}{1^{\sigma|1}}\left(\frac{d^\sigma \cos at\mathrm{L}p}{dp^\sigma}\right)_0 \mathrm{F}_1(r+\sigma) + \frac{1}{1^{\sigma|1}}\left(\frac{d^\sigma \dfrac{\sin at\mathrm{L}p}{a\mathrm{L}p}}{dp^\sigma}\right)_0 \mathrm{F}_2(r-\sigma)\right].$$

Il reste à calculer les dérivées des cosinus et sinus hyperboliques; par

exemple, pour le cosinus, on a une expression de la forme

$$\frac{d^\sigma \cos at\mathrm{L}p}{dp^\sigma} = [(at)^\sigma + k_2(at)^{\sigma-2} + k_4(at)^{\sigma-4} + \ldots] \frac{\overset{\sin}{\underset{\cos}{}}(at\mathrm{L}p)}{p^\sigma}$$

$$- [k_1(at)^{\sigma-1} + k_3(at)^{\sigma-3} + k_5(at)^{\sigma-5} + \ldots] \frac{\overset{\cos}{\underset{\sin}{}}(at\mathrm{L}p)}{d^\sigma},$$

k_1, k_2, k_3, ... sont des coefficients numériques que l'on déterminerait au moyen des formules (96), (96)′, (96)″, à moins que l'on n'en aperçoive directement la formation, ce qui est facile. Nous indiquons par sin et cos superposés que la fonction est un sinus ou un cosinus, ou inversement. Or, si $p = 0$, il vient $\mathrm{L}p = -\infty$, $\overset{\sin}{\underset{\cos}{}}(at\mathrm{L}p)$ tend vers $\pm \frac{1}{2} e^{-at\mathrm{L}p}$ ou $\pm \frac{1}{2} p^{at}$, et $\overset{\cos}{\underset{\sin}{}}(at\mathrm{L}p)$ tend vers $\mp \frac{1}{2} e^{-at\mathrm{L}p}$ ou $\mp \frac{1}{2} p^{at}$, ce qui donne, pour l'expression précédente,

$$\pm \frac{1}{2} [(at)^\sigma + k_1(at)^{\sigma-1} + k_2(at)^{\sigma-2} + \ldots] \frac{p^{at}}{p^\sigma}.$$

D'après la formation des coefficients k, le développement entre crochets n'est autre que la factorielle

$$(at + \sigma - 1)(at + \sigma - 2)\ldots at = at^{\sigma|-1};$$

ainsi, quand p tend vers zéro,

$$\frac{1}{1^{\sigma|1}} \frac{d^\sigma \cos at\mathrm{L}p}{dp^\sigma}$$

tend vers

$$\pm \frac{1}{2} \frac{at^{\sigma|-1}}{1^{\sigma|1}} \frac{p^{at}}{p^\sigma},$$

et, comme cette expression a lieu quel que soit σ, elle ne sera ni nulle ni infinie si $\sigma = at$. On a donc $\pm \frac{1}{2} \mathrm{F}_1(r + at)$ pour la première partie de la somme composant la fonction $r\psi$; on peut regarder le coefficient $\pm \frac{1}{2}$ comme appartenant à la fonction arbitraire F_1. En opérant d'une manière analogue pour la seconde partie de la même somme, on aboutirait définitivement à l'expression $(\varkappa)'$ déjà trouvée.

2° *Détermination des quantités qui entrent dans l'intégrale générale.* — La fonction ψ étant déterminée, il reste à calculer la fonction f, ou plutôt la dérivée $\frac{df}{dr} = V$. Partant de

$$(\mu) \qquad \psi = \frac{1}{r}[F_1(r+at) + F_2(r-at)]$$

et faisant

$$(\mu)' \qquad \frac{d\psi}{dr} = \zeta, \quad \frac{d\psi}{dt} = \eta,$$

on a

$$(\nu) \quad \zeta = \frac{1}{r}\left[\frac{dF_1(r+at)}{dr} + \frac{dF_2(r-at)}{dr}\right] - \frac{1}{r^2}[F_1(r+at) + F_2(r-at)],$$

$$(\nu)' \qquad \eta = \frac{a}{r}\left[\frac{dF_1(r+at)}{dt} - \frac{dF_2(r-at)}{dt}\right];$$

les dérivées $\frac{d\zeta}{dr}, \frac{d^2\zeta}{dr^2}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d^2\eta}{dt^2}, \frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\eta}{dr}, \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dt\,dr}, \frac{d^2\eta}{dr^2} = \frac{d^2\zeta}{dt\,dr}$ s'obtiendraient aisément. Ensuite, la fonction que nous avons généralement notée par $\varphi(\varpi)$, et qui est ici $\varphi(\psi)$, deviendra, en écrivant l'équation réduite sous la forme

$$\frac{d\eta}{dt} - a^2\left(\frac{d\zeta}{dr} + \frac{2}{r}\zeta\right) = 0,$$

$$\varphi(\psi) = \frac{d\eta}{dt} + 2\frac{d\eta}{dr}\zeta + \frac{d\zeta}{dr}\zeta^2 + \left(\frac{c}{c'} - 1\right)\left(\eta + \frac{1}{2}\zeta^2\right)\frac{d\eta}{dt};$$

Posons, pour abréger,

$$U = \eta + \tfrac{1}{2}\zeta^2;$$

la fonction précédente devient, en vertu de (ν) et $(\nu)'$

$$(\xi) \qquad \varphi(\psi) = \frac{dU}{dt} + \zeta\frac{dU}{dr} + \left(\frac{c}{c'} - 1\right)U\frac{d\eta}{dt}$$

et, par suite,

$$(o)\quad \frac{d\varphi(\psi)}{dt} = \frac{d^2U}{dt^2} + \zeta\frac{d^2U}{dt\,dr} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{dU}{dr} + \left(\frac{c}{c'} - 1\right)\left[U\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{dU}{dt}\frac{d\eta}{dt}\right],$$

$$(o)'\quad \frac{d\varphi(\psi)}{dr} = \frac{d^2U}{dt\,dr} + \zeta\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{d\zeta}{dr}\frac{dU}{dr} + \left(\frac{c}{c'} - 1\right)\left[U\frac{d^2\eta}{dt\,dr} + \frac{dU}{dr}\frac{d\eta}{dt}\right].$$

Au moyen de ces quantités on peut calculer la fonction $\Phi(f)$ de (ϑ), en réduisant le développement aux deux premiers termes, savoir :

$$\Phi(f) = \Phi(\psi) - \varphi(\psi)\frac{\left(\frac{d\Phi(\psi)}{d\psi}\right)}{\left(\frac{d\varphi(\psi)}{d\psi}\right)},$$

et l'on a

$$\left(\frac{d\varphi(\psi)}{d\psi}\right) = \left(\frac{d\varphi(\psi)}{dt}\right)\frac{1}{\frac{d\psi}{dt}} + \left(\frac{d\varphi(\psi)}{dr}\right)\frac{1}{\frac{d\psi}{dr}} = \frac{1}{\eta\zeta}\left[\left(\frac{d\varphi(\psi)}{dt}\right)\zeta + \left(\frac{d\varphi(\psi)}{dr}\right)\eta\right],$$

d'où, pour $\Phi(f) = f$,

$$(\varpi)\qquad f = \psi - \varphi(\psi)\frac{\eta\zeta}{\left(\frac{d\varphi(\psi)}{dt}\right)\zeta + \left(\frac{d\varphi(\psi)}{dr}\right)\eta}.$$

Si l'on fait encore

$$\Phi(f) = \frac{df}{dr} = V,$$

on a

$$\left(\frac{d\Phi(\psi)}{d\psi}\right) = \frac{1}{\eta\zeta}\left[\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)\zeta + \left(\frac{d\zeta}{dr}\right)\eta\right];$$

il vient donc, pour la fonction cherchée V,

$$(\rho)\qquad V = \zeta - \varphi(\psi)\frac{\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)\zeta + \left(\frac{d\zeta}{dr}\right)\eta}{\left(\frac{d\varphi(\psi)}{dt}\right)\zeta + \left(\frac{d\varphi(\psi)}{dr}\right)\eta}.$$

Quant à la condensation γ, en mettant les dérivées de ψ à la place de celles de f dans l'équation $(\theta)'$, et appelant s la quantité que l'on obtient alors au lieu de γ, et qui sera la valeur fondamentale de cette dernière quantité, on obtient

$$(\sigma) \qquad s = \left(\frac{-\mathrm{U}}{b^2}\right)^{\frac{1}{\frac{c}{c'}-1}} - 1,$$

en faisant, pour simplifier,

$$(\sigma)_1 \qquad b^2 = \frac{a^2}{\frac{c}{c'} - 1}.$$

D'après un calcul connu, on trouverait l'expression plus simple

$$(\sigma)' \qquad s = -\frac{\eta_1}{a^2},$$

que l'on pourrait prendre également pour valeur fondamentale.

On a enfin, comme il est facile de le voir, par (σ) ou $(\sigma)'$,

$$(\rho)' \qquad \gamma = s - \frac{b^2(1+s)^{\frac{c}{c'}-1} + \eta_1 + \frac{1}{2}\zeta^2}{a^2(1+s)^{\frac{c}{c'}-2}}.$$

Les deux quantités V et γ qu'il s'agissait de calculer sont ainsi données par (ρ) et $(\rho)'$.

3° *Détermination des fonctions arbitraires.* — En dernier lieu, nous avons à déterminer les fonctions arbitraires. Si tout est symétrique par rapport à l'origine, c'est-à-dire par rapport au centre d'ébranlement, celui-ci devant rester immobile, il faut que les quantités f et V soient nulles pour $r = 0$, ce qui donne, d'après (ϖ) et (ρ),

$$(\varsigma) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\zeta\left[\left(\frac{d\varphi(\psi)}{dt}\right)\zeta + \left(\frac{d\varphi(\psi)}{dr}\right)\eta\right] - \varphi(\psi)\left[\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)\zeta + \left(\frac{d\zeta}{dr}\right)\eta\right] = 0, \\ &\psi\left[\left(\frac{d\varphi(\psi)}{dt}\right)\zeta + \left(\frac{d\varphi(\psi)}{dr}\right)\eta\right] - \varphi(\psi)\eta\zeta = 0, \end{aligned} \right\} \text{ pour } r = 0.$$

On a ainsi deux relations auxquelles doivent satisfaire les fonctions arbitraires F_1 et F_2 qui sont impliquées dans la fonction ψ et, par suite, dans η et ζ. En outre, les valeurs initiales sont données pour $t = 0$; on a donc

$$(\tau) \qquad V_0 = \Psi_1(r), \quad \gamma_0 = \Psi_2(r).$$

Puisque les fonctions $\Psi_1(r)$ et $\Psi_2(r)$ sont données, ces deux conditions déterminent complètement les fonctions arbitraires F_1 et F_2. Mais ici nous ne trouvons pas le cas ordinaire dont nous avons parlé : les valeurs initiales ne correspondent pas aux valeurs moyennes adoptées, parce que nous avons voulu utiliser, comme équation réduite, une équation déterminée (ι). Les valeurs moyennes dont nous avons fait usage se présentaient d'ailleurs naturellement. De là résulte que la fonction inconnue ne se réduit pas à la valeur fondamentale lorsque l'on donne aux variables les valeurs qui correspondent à l'état initial.

La détermination des fonctions arbitraires exige alors la résolution d'un système d'équations simultanées qui est, d'après (ρ) et (ρ') et (ς),

$$(\tau)' \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi_1(r) &= \zeta_0 - \varphi(\psi_0) \frac{\left(\dfrac{d\zeta_0}{dt}\right)\zeta_0 + \left(\dfrac{d\zeta_0}{dr}\right)\eta_0}{\left(\dfrac{d\varphi(\psi_0)}{dt}\right)\zeta_0 + \left(\dfrac{d\varphi(\psi_0)}{dr}\right)\eta}, \\ \Psi_2(r) &= s_0 - \frac{b^2(1+s_0)^{\frac{c}{c'}-1} + \eta_0 + \frac{1}{2}\zeta_0^2}{a^2(1+s_0)^{\frac{c}{c'}-2}}. \end{aligned} \right.$$

Les inconnues F_1, F_2 sont comprises dans les fonctions ψ_0, η_0, ζ_0 et s_0. La résolution de ce système, quoique compliquée, est possible, comme nous le montrerons plus loin; il suffit pour l'instant d'observer que, par l'application de la méthode secondaire, les fonctions F_1 et F_2, exprimées au moyen des fonctions Ψ_1 et Ψ_2, exigeront la connaissance de premières valeurs approchées qui seront leurs valeurs fondamentales.

Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ les valeurs fondamentales de F_1 et de F_2 que nous déterminerons en substituant ζ_0 et s_0 à V_0 et γ_0 dans (ς); on a, d'après un calcul de Poisson, en tenant compte de (ν), $(\nu)'$ et $(\sigma)'$, puis en

remplaçant F par $\mathfrak{F}$ et faisant $t = 0$ après les dérivations,

$$(\tau)'' \quad \begin{cases} \Psi_1(r) = \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{d\mathfrak{F}_1(r)}{dr} + \dfrac{d\mathfrak{F}_2(r)}{dr}\right] - \dfrac{1}{r^2}[\mathfrak{F}_1(r) + \mathfrak{F}_2(r)], \\ \Psi_2(r) = \dfrac{-1}{ar}\left[\dfrac{d\mathfrak{F}_1(r)}{dt} - \dfrac{d\mathfrak{F}_2(r)}{dt}\right]. \end{cases}$$

La seconde relation peut s'écrire

$$(\varphi) \qquad r\Psi_2(r) = -\frac{d\mathfrak{F}_1(r)}{dr} + \frac{d\mathfrak{F}_2(r)}{dr},$$

et, intégrant, il vient

$$(\varphi)_1 \qquad \int r\Psi_2(r) = -\mathfrak{F}_1(r) + \mathfrak{F}_2(r);$$

quant à la première, elle donne par intégration

$$(\varphi)' \qquad r\int \Psi_1(r)\,dr = \mathfrak{F}_1(r) + \mathfrak{F}_2(r),$$

d'où

$$(\varphi)'_1 \qquad \int \Psi_1(r)\,dr + r\Psi_1(r) = \frac{d\mathfrak{F}_1(r)}{dr} + \frac{d\mathfrak{F}_2(r)}{dr}.$$

Il n'est pas nécessaire de tenir compte ici des constantes d'intégration. (φ), $(\varphi)_1$, $(\varphi)'$ et $(\varphi)'_1$ donnent alors

$$(\chi) \quad \begin{cases} 2\mathfrak{F}_1(r) = r\int \Psi_1(r)\,dr - \int r\Psi_2 r(dr), \\ 2\mathfrak{F}_2(r) = r\int \Psi_1(r)\,dr + \int r\Psi_2 r\,dr, \\ 2\dfrac{d\mathfrak{F}_1 r}{dr} = \int \Psi_1(r)\,dr + r[\Psi_1(r) - \Psi_2(r)], \\ 2\dfrac{d\mathfrak{F}_2 r}{dr} = \int \Psi_2(r)\,dr + r[\Psi_1(r) + \Psi_2(r)]. \end{cases}$$

Nous avons de cette manière les valeurs fondamentales $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ des deux fonctions arbitraires F_1, F_2, ainsi que leurs dérivées.

On peut maintenant résoudre par rapport à F_1 et F_2 le système des deux équations simultanées (τ) et déterminer les fonctions arbitraires, comme nous l'indiquerons plus loin.

Nous pouvons donc considérer comme achevée dès à présent l'intégration complète des équations (θ) et (θ'), la première étant une équation aux dérivées partielles du second ordre à coefficients variables qui jusqu'à présent avait résisté aux méthodes ordinaires. En effet, nous devions appliquer l'expression fondamentale (68) ou (ϑ); pour cela, choisissant une fonction qui donnait déjà pour la vitesse V la solution d'une manière très approchée, nous avons calculé les éléments constituant le second terme de l'expression (ϑ), de sorte que nous pourrions encore, sans rencontrer d'autres difficultés que la longueur des calculs, obtenir successivement les autres termes de cette expression. Nous aurions ainsi, avec une approximation aussi grande qu'on pourrait le désirer, les valeurs de la fonction inconnue sans omettre ou restreindre aucune des conditions du problème. C'est là un *desideratum* que l'on devait s'efforcer d'obtenir, car les fonctions cherchées étant, par la nature de la question, des fonctions transcendantes, nous ne pouvons espérer les connaître que par une suite successive et indéfinie d'approximations.

La forme technique de la solution que nous avons obtenue ne se prête pas aussi facilement à une discussion qu'une forme purement théorique; cependant il est possible de reconnaître la propagation uniforme du mouvement ondulatoire.

Néanmoins, si l'on rencontrait des résultats qui paraissent être en contradiction avec des faits reconnus, on ne devrait pas conclure que le système d'intégration soit en défaut. Par exemple, on a observé dernièrement que les ondes sonores, produites dans certaines conditions au moyen d'étincelles électriques, se propagent avec une vitesse plus grande, près du centre d'ébranlement, qu'un peu au delà. Il est visible que la solution, telle que nous l'avons obtenue, ne peut rendre compte d'un pareil fait, car les équations (θ), (θ') supposent qu'il n'y a pas propagation de chaleur, tandis que la chaleur produite par l'étincelle au centre d'ébranlement doit forcément se propager dans les couches voisines.

D'ailleurs la supposition d'un rapport sensiblement constant pour les chaleurs spécifiques, bien que vérifiée dans les limites étendues de température, ne serait plus admissible dans ce cas, à cause de la température extrême qui est développée par l'étincelle; on se trouve

bien au delà des limites pour lesquelles la constance du rapport $\frac{c}{c'}$ a été reconnue. De plus, si l'on se reportait à la critique très juste de Wronski, critique que l'on trouve à la fin de son Ouvrage des *Nouveaux systèmes de machines à vapeur*, on verrait que les deux chaleurs spécifiques c et c' dépendent de quantités de chaleur essentiellement différentes que l'on confond encore communément; d'où il résulte que la relation (α') est non seulement empirique, mais encore fausse en principe; cette erreur se transmet nécessairement dans le résultat de l'intégration, mais il est clair qu'elle ne fausse pas l'intégration même, question de calcul qui seule doit nous occuper ici.

L'exemple traité nous a paru très propre à faire saisir l'esprit de la méthode de Wronski; il montre de quelle manière, à l'avenir, on pourra utiliser les solutions approchées dont on a dû se contenter dans la plupart des cas, pour en déduire les solutions complètes de problèmes que l'on pouvait croire presque insolubles.

RÉSOLUTION ET INTÉGRATION DES ÉQUATIONS SIMULTANÉES.

Nous venons de donner l'intégration des équations aux différences ou aux différentielles partielles à coefficients quelconques; il nous reste, pour compléter l'exposition de la méthode, à considérer le cas plus général où les équations à résoudre ou à intégrer forment des systèmes d'équations simultanées.

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_m$, m fonctions de n quantités $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_\lambda$ considérées comme inconnues, de ν quantités données $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$, pouvant varier à volonté, et d'un nombre quelconque de quantités constantes que nous ne désignons pas.

Soient de plus m relations qui forment les équations du problème et que nous écrirons

$$\begin{gathered}\varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda) = 0,\\ \varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda) = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \varphi_m(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda) = 0.\end{gathered}$$

D'après ces relations, les inconnues étant fonctions des variables

indépendantes et des quantités constantes sont aussi fonctions les unes des autres; cette remarque est essentielle pour ce qui va suivre.

Nous avons admis que le nombre des relations pouvait différer de celui des inconnues : si $\lambda > m$, $\lambda - m$ inconnues ne peuvent être déterminées, et si $\lambda < m$, il faut, pour que le problème soit possible, que $m - \lambda$ relations rentrent dans les λ autres. Ainsi, pour satisfaire généralement au problème, il faut dans le premier cas, $\lambda > m$, que $\lambda - m$ quantités inconnues y soient assimilées aux quantités variables indépendantes x, et dans le deuxième cas, $\lambda < m$, que $m - \lambda$ équations soient considérées comme superflues, à moins que $m - \lambda$ quantités x supposées indépendantes puissent recevoir des déterminations de la même manière que les inconnues. Nous pouvons donc supposer le nombre des inconnues égal au nombre des équations et celles-ci entièrement distinctes; nous aurons alors, au lieu du système d'équations précédent, le système

$$(100)\qquad \begin{cases} \varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda) = 0, \\ \varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_\lambda(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda) = 0. \end{cases}$$

On peut admettre que certaines inconnues n'entrent pas dans toutes les équations.

Il faut remarquer que nous ne considérons ici que les équations prises en elles-mêmes, c'est-à-dire, abstraction faite des problèmes possibles dont elles ne sont que la traduction; aussi, en vue du cas ordinaire de la pratique, où les inconnues sont généralement susceptibles d'être déterminées, devions-nous prendre un nombre d'équations égal à celui des inconnues.

Cela posé, dans le cas d'équations qui contiennent des différences ou des différentielles des inconnues, il y a toujours au moins une quantité x variable indépendante qui se trouve être ainsi variable commune; mais, dans le cas d'équations primitives, c'est-à-dire, d'équations dans lesquelles les différences ou les différentielles des inconnues n'entrent pas, il n'existe pas de variable commune, ou plutôt on ne considère pas, dans la résolution, les variations des quantités indépendantes qui peuvent exister; ces quantités sont ordinairement traitées comme

des constantes. Dans la méthode présente, il convient de tenir compte d'une variable commune pour exprimer les dérivées des inconnues qui entrent dans l'expression fondamentale. Si les équations ne contiennent pas une quantité qui soit naturellement désignée pour cet objet, on pourra prendre, pour en tenir lieu, une quantité qui entre à la fois dans toutes les équations, l'une des inconnues par exemple; ou bien, on introduira convenablement dans toutes les équations une quantité arbitraire en facteur ou en exposant, comme nous l'avons fait pour la quantité ω dans la formation des équations réduites. Il est clair, à cause de la dépendance de toutes les quantités, que cette manière d'opérer ne doit rien changer au résultat définitif, pourvu que l'on donne à la variable commune, après les opérations effectuées, la valeur qu'elle a dans les équations proposées.

Maintenant, dans le cas d'équations primitives à résoudre, pour déterminer l'une des inconnues y_α, ou mieux une fonction donnée $F(y_\alpha)$ de cette inconnue, laquelle représentera, pour abréger, la fonction

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_\alpha, \ldots, y_\lambda),$$

puisque nous supposons par les relations (100) que $y_1, y_2, \ldots, y_\lambda$ sont des fonctions de y_α, nous choisirons l'une des équations du système

$$\text{(101)} \qquad \varphi_\beta(y_1, y_2, \ldots, y_\alpha, \ldots, y_\lambda) = 0,$$

qui paraîtra la plus favorable pour cet objet; autrement l'une quelconque des équations pourrait convenir. En considérant les inconnues autres que y_α comme fonctions de cette inconnue particulière, nous pouvons écrire ainsi l'équation (101)

$$\text{(102)} \qquad \varphi_\beta(y_\alpha) = 0,$$

pour nous conformer aux notations précédentes, et l'expression fondamentale donne

$$\text{(103)} \quad \left\{ \begin{aligned} F(y_\alpha) &= F(w_\alpha) - \varphi_\beta(w_\alpha) \frac{d\,F(w_\alpha)}{d\,\varphi_\beta(w_\alpha)} \\ &\quad + \frac{1}{2} [\varphi_\beta(w_\alpha)]^2 \frac{d\,\varphi(w_\alpha)\, d^2F(w_\alpha) - d^2\varphi_\beta(w_\alpha)\, d\,F(w_\alpha)}{[d\,\varphi_\beta(w_\alpha)]^3} - \ldots \end{aligned} \right.$$

D'après ce qui a été dit, ϖ_α est une fonction généralement *quelconque* de la variable indépendante, mais pratiquement cette fonction doit être aussi rapprochée que possible de l'inconnue y_α pour que l'expression précédente soit suffisamment convergente. Nous avons fait voir que cette fonction ϖ_α se déduisait ordinairement d'équations réduites; nous y reviendrons tout à l'heure.

Les différentielles des fonctions F et φ_β sont prises par rapport à l'inconnue y_α, à laquelle on substitue ensuite sa valeur fondamentale ϖ_α. Il faut tenir compte, dans le calcul de ces différentielles, de ce que les autres inconnues sont fonctions de l'inconnue particulière y_α par l'intermédiaire de la variable commune x; on voit ainsi l'utilité de cette variable commune.

Prenant donc les dérivées des fonctions F et φ_β par rapport à x, l'expression précédente devient

$$(103)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{F}(y_\alpha) = {} & \mathrm{F}(\varpi_\alpha) - \varphi_\beta(\varpi_\alpha)\frac{\left(\dfrac{d\,\mathrm{F}(\varpi_\alpha)}{dx}\right)}{\left(\dfrac{d\,\varphi_\beta(\varpi_\alpha)}{dx}\right)} \\ & + \frac{1}{2}[\varphi_\beta(\varpi_\alpha)]^2\frac{\left(\dfrac{d\,\varphi_\beta(\varpi_\alpha)}{dx}\right)\left(\dfrac{d^2\,\mathrm{F}(\varpi_\alpha)}{dx^2}\right)-\left(\dfrac{d^2\varphi_\beta(\varpi_\alpha)}{dx^2}\right)\left(\dfrac{d\,\mathrm{F}(\varpi_\alpha)}{dx}\right)}{\left(\dfrac{d\,\varphi_\beta(\varpi_\alpha)}{dx}\right)^3} - \ldots \end{aligned}\right.$$

Nous indiquons par des parenthèses que les dérivées des fonctions F et φ_β sont prises seulement par rapport à l'inconnue y_α et par rapport à $y_1, y_2, \ldots, y_\lambda$, fonctions de cette dernière quantité.

L'expression (103) est aussi applicable aux équations qui contiennent des différences ou des différentielles des inconnues; mais, s'il y avait des différences ou des différentielles partielles, il conviendrait de transformer l'expression (103) et de la mettre sous la même forme que l'expression (68).

Calcul des dérivées. — Le calcul des dérivées qui entrent dans (103) exige, comme nous venons de le dire, la connaissance des dérivées suivantes :

$$\frac{dy_1}{dy_\alpha},\quad \frac{dy_2}{dy_\alpha},\quad \ldots,\quad \frac{dy_\alpha}{dy_\alpha},\quad \frac{d^2y_1}{dy_\alpha^2},\quad \frac{d^2y_2}{dy_\alpha^2},\quad \ldots,\quad \frac{d^2y_\lambda}{dy_\alpha^2},\quad \ldots,\quad \text{etc.}$$

et se ramène à la détermination des dérivées de toutes les inconnues par rapport à la variable commune x.

Ces dérivées s'obtiendront généralement au moyen des dérivées totales des équations proposées, lesquelles présenteront un système d'équations du premier degré par rapport aux quantités cherchées, d'où l'on déduira facilement les dérivées en question.

Ainsi, en reprenant l'équation (101) ou (102), supposée primitive, que nous écrirons pour simplifier $\varphi = 0$, et en indiquant par des indices correspondant aux variables le résultat de la différentiation effectuée sur la fonction φ, une première différentiation donne

$$\varphi_0 dx + \varphi_1 dy_1 + \varphi_2 dy_2 + \ldots + \varphi_\lambda dy_\lambda = 0,$$

ou, en prenant les dérivées par rapport à x,

$$(105) \qquad \varphi_0 + \varphi_1 \frac{dy_1}{dx} + \varphi_2 \frac{dy_2}{dx} + \ldots + \varphi_\lambda \frac{dy_\lambda}{dx} = 0.$$

En opérant de même sur les autres équations proposées, nous aurions $\lambda - 1$ autres équations de même forme que (105), c'est-à-dire du premier degré par rapport aux dérivées cherchées, lesquelles avec (105) permettraient de déterminer les dérivées du premier ordre des inconnues. Le véritable motif d'introduction de la variable auxiliaire x se voit ici clairement.

Une seconde dérivation donne un second système de λ équations de la forme

$$\varphi_{0,0} + \varphi_{1,0} \frac{dy_1}{dx} + \ldots + \varphi_{\lambda,0} \frac{dy_\lambda}{dx} + \left(\varphi_{0,1} + \varphi_{1,1} \frac{dy_1}{dx} + \ldots + \varphi_{\lambda,1} \frac{dy_\lambda}{dx}\right) \frac{dy_1}{dx}$$
$$+ \ldots + \left(\varphi_{0,\lambda} + \varphi_{1,\lambda} \frac{dy_1}{dx} + \ldots + \varphi_{\lambda,\lambda} \frac{dy_\lambda}{dx}\right) \frac{dy_\lambda}{dx}$$
$$+ \varphi_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} + \varphi_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} + \ldots + \varphi_\lambda \frac{d^2 y_\lambda}{dx^2} = 0.$$

Les dérivées premières étant supposées déjà déterminées, l'ensemble des termes où elles entrent peut être représenté par Φ, ce qui réduit l'équation précédente à

$$(105)' \qquad \Phi + \varphi_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} + \varphi_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} + \ldots + \varphi_\lambda \frac{d^2 y_\lambda}{dx^2} = 0.$$

Cette équation avec $\lambda - 1$ autres que l'on obtiendrait de la même manière forment un système d'équations du premier degré par rapport aux dérivées secondes des inconnues d'où il est facile de déduire ces quantités.

Les dérivées des ordres supérieurs s'obtiendraient en suivant le même procédé. Après ces opérations effectuées, on change $y_1, y_2, \ldots$ en w_1, $w_2, \ldots$ pour composer l'expression $(103)_1$.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que le système des équations conjointes (100) était formé d'équations primitives; mais, si ces équations contenaient des différences ou des différentielles des inconnues, il suffirait de considérer ces différences ou ces différentielles comme des fonctions des valeurs fondamentales $w_1, w_2, \ldots, w_\lambda$, et d'appliquer le procédé indiqué pour les équations primitives; on considérerait aussi les inconnues comme fonctions de l'une d'entre elles dans chacune des équations du système.

Si l'on a deux équations différentielles, réduites au premier ordre pour plus de simplicité, de la forme suivante :

$$\frac{dy_1}{dx}\mathrm{A} + \frac{dy_2}{dx}\mathrm{B} + \mathrm{C} = 0,$$

où A, B, C peuvent être des fonctions de y_1, y_2, $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}$ et x, on aura, en différentiant,

$$\left(\frac{d\mathrm{C}}{dx}\right) + \left[\left(\frac{d\mathrm{A}}{dx}\right) + \left(\frac{d\mathrm{C}}{dy_1}\right)\right]\frac{dy_1}{dx} + \left[\left(\frac{d\mathrm{B}}{dx}\right) + \left(\frac{d\mathrm{C}}{dy_2}\right)\right]\frac{dy_2}{dx} + \left(\frac{d\mathrm{A}}{dy_1}\right)\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2$$
$$+ \left[\left(\frac{d\mathrm{A}}{dy_2}\right) + \left(\frac{d\mathrm{B}}{dy_1}\right)\right]\frac{dy_1}{dx}\frac{dy_2}{dx} + \left(\frac{d\mathrm{B}}{dy_2}\right)\left(\frac{dy_2}{dx}\right)^2 + \mathrm{A}\frac{d^2y_1}{dx^2} + \mathrm{B}\frac{d^2y_2}{dx^2} = 0.$$

En remplaçant les inconnues y_1, y_2, ainsi que $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}$, par leurs valeurs fondamentales, les quantités w_1, w_2, $\frac{dw_1}{dx}$, $\frac{dw_2}{dx}$ seront connues : il ne restera dans cette équation que les deux dérivées inconnues $\frac{d^2w_1}{dx^2}$, $\frac{d^2w_2}{dx^2}$, au premier degré seulement. Une seconde équation semblable, provenant de la seconde équation proposée, que nous n'avons pas écrite, permettrait d'obtenir ces deux dérivées secondes par la résolution d'équations du premier degré.

Les dérivées d'ordres supérieurs s'obtiendraient par le même moyen en différentiant encore les mêmes équations.

Si l'on a deux équations aux différences finies de la forme

$$\Delta y_1 \mathrm{A} + \Delta y_2 \mathrm{B} + \mathrm{C} = 0,$$

où A, B, C peuvent être des fonctions de y_1, y_2, Δy_1, Δy_2 et x (nous ne considérons encore que le premier ordre pour plus de simplicité), on obtient, en différentiant,

$$\begin{aligned}\Delta y_1 \left(\frac{d\mathrm{A}}{dx}\right) + \frac{d\,\Delta y_1}{dx}\mathrm{A} + \Delta y_2 \left(\frac{d\mathrm{B}}{dx}\right) + \frac{d\,\Delta y_2}{dx}\mathrm{B} + \left(\frac{d\mathrm{C}}{dx}\right) \\ + \left[\Delta y_1 \left(\frac{d\mathrm{A}}{dy_1}\right) + \Delta y_2 \left(\frac{d\mathrm{B}}{dy_1}\right) + \left(\frac{d\mathrm{C}}{dy_1}\right)\right]\frac{dy_1}{dx} \\ + \left[\Delta y_1 \left(\frac{d\mathrm{A}}{dy_2}\right) + \Delta y_2 \left(\frac{d\mathrm{B}}{dy_2}\right) + \left(\frac{d\mathrm{C}}{dy_2}\right)\right]\frac{dy_2}{dx} = 0.\end{aligned}$$

En remplaçant les inconnues y_1, y_2, ainsi que Δy_1, Δy_2, par leurs valeurs fondamentales, les quantités w_1, w_2, Δw_1, Δw_2 seront connues : il ne restera dans cette équation que les deux dérivées $\frac{dw_1}{dx}$, $\frac{dw_2}{dx}$ au premier degré seulement ([1]). Une équation semblable, déduite de la seconde équation proposée que nous n'avons pas écrite, permettrait de déterminer les dérivées cherchées par un système d'équations linéaires. Les dérivées d'ordres supérieurs s'obtiendraient encore facilement.

S'il s'agissait d'équations aux différences ou aux différentielles partielles, on calculerait par le même moyen les dérivées partielles qui entrent dans l'expression fondamentale, celle-ci prenant la forme (68).

Ainsi, pour deux équations différentielles de la forme

$$\frac{dy_1}{dx_1}\mathrm{A} + \frac{dy_1}{dx_2}\mathrm{B} + \frac{dy_2}{dx_1}\mathrm{C} + \frac{dy_2}{dx_2}\mathrm{D} + \mathrm{E} = 0,$$

où A, B, C, D, E peuvent être des fonctions de y_1, y_2, $\frac{dy_1}{dx_1}$, $\frac{dy_1}{dx_2}$, $\frac{dy_2}{dx_1}$,

([1]) Les dérivées des différences Δw étant substituées aux dérivées de Δy, et Δw étant une fonction de x, d'après la valeur fondamentale w, nous avons considéré Δy comme une fonction immédiate de x dans la relation précédente.

$\frac{dy_2}{dx_2}$, x_1 et x_2, on prendrait la différentielle totale du premier membre de l'équation; puis, remplaçant les différentielles de y_1 et y_2 par leurs expressions considérées comme fonctions de x_1 et x_2, savoir

$$dy_1 = \frac{dy_1}{dx_1} dx_1 + \frac{dy_1}{dx_2} dx_2,$$

$$dy_2 = \frac{dy_2}{dx_1} dx_1 + \frac{dy_2}{dx_2} dx_2,$$

$$d^2y_1 = \frac{d^2y_1}{dx_1^2} dx_1^2 + 2\frac{d^2y_1}{dx_1 dx_2} dx_1 dx_2 + \frac{d^2y_1}{dx_2^2} dx_2^2,$$

$$d^2y_2 = \frac{d^2y_2}{dx_1^2} dx_1^2 + 2\frac{d^2y_2}{dx_1 dx_2} dx_1 dx_2 + \frac{d^2y_2}{dx_2^2} dx_2^2,$$

et ainsi de suite, la différentielle totale égalée à zéro se partagerait, à cause de l'indépendance des variables x_1 et x_2, en autant d'équations qu'il est nécessaire d'en avoir pour déterminer les dérivées partielles du second ordre des mêmes inconnues, en tenant compte toutefois de la seconde équation simultanée non écrite. Remplaçant ensuite les inconnues y_1, y_2 et leurs premières dérivées par leurs valeurs fondamentales, il ne resterait plus, dans les équations dont il s'agit, que les dérivées partielles du second ordre $\frac{d^2w_1}{dx_1^2}$, $\frac{d^2w_1}{dx_1^2}$, $\cdots$ entrant au premier degré; ces dernières dérivées s'en déduiraient facilement.

Enfin, si l'on avait des équations simultanées aux différences partielles, on opérerait d'une manière tout à fait semblable pour obtenir les dérivées partielles du premier ordre ou des ordres supérieurs qui entrent dans l'expression fondamentale (68).

En résumé, les dérivées des inconnues, dont on a besoin pour former l'expression fondamentale de la fonction cherchée, peuvent dans tous les cas être obtenues par la résolution de systèmes d'équations linéaires. Il faudra généralement recourir à cette résolution; car, bien que les dérivées dont il s'agit puissent être déduites des valeurs fondamentales, celles-ci pourraient conduire à des résultats s'écartant beaucoup des valeurs véritables, et la convergence de l'expression fondamentale serait difficile à obtenir.

Détermination des valeurs fondamentales et des quantités arbitraires. — Pour achever la résolution ou l'intégration d'un système d'équations

simultanées, il reste à montrer comment on peut obtenir les valeurs fondamentales w_1, w_2, ... des inconnues, puis comment on peut déterminer les fonctions ou constantes arbitraires d'intégration. La question ne présente plus de difficultés d'après ce qui a été dit dans le cas d'équations non simultanées, la marche à suivre étant la même.

Ainsi, on formera un système d'équations réduites pour déterminer les valeurs fondamentales et leurs dérivées, à moins que celles-ci ne soient connues d'avance, ce qui arrivera quelquefois, en faisant usage de considérations particulières aux problèmes que l'on aura à traiter.

Pour former les équations réduites, on introduit dans chacune des équations du système (100) une quantité arbitraire ω, soit en facteur, soit en exposant, de manière qu'en faisant ces diverses quantités ω égales à zéro, on obtienne des équations résolubles ou intégrables par les procédés ordinaires (c'est le système des équations réduites), et qu'en faisant ces quantités égales à l'unité on retombe sur les équations proposées.

Les équations réduites peuvent former des équations contenant séparément les inconnues ou des systèmes d'équations simultanées. Ces équations doivent nécessairement présenter des solutions de même nature que les équations proposées. Par exemple, dans le cas d'intégrations, les équations réduites devront être de même ordre que les équations proposées, pour qu'il puisse être introduit autant de constantes ou de fonctions arbitraires que les équations proposées en comportent. Il est toujours possible de former un système d'équations réduites faciles à résoudre, les quantités auxiliaires ω permettant de remplacer, dans les termes des équations proposées, certaines fonctions par des constantes égales aux valeurs moyennes de ces fonctions, quand on considère leurs variations entre des limites déterminées. Le moyen général consistera à composer, comme on l'a fait dans le cas d'intégrations, des équations linéaires à coefficients constants toujours intégrables par des moyens connus; les intégrales de ces équations, qui sont les valeurs fondamentales w_1, w_2, ..., introduisent le nombre de constantes ou de fonctions arbitraires que la question exige, de sorte que, en portant les fonctions w_1, w_2, ... dans l'expression (103), ou (68), les fonctions inconnues y_1, y_2, ... ou

$F(y_1)$, $F(y_2)$, ... contiendront le nombre voulu de constantes ou de fonctions arbitraires.

Ensuite, pour déterminer ces quantités arbitraires, il faut considérer que l'on a remplacé certaines fonctions par des constantes (ou quelquefois par des fonctions plus simples que celles qui composent les coefficients des équations), telles que, pour des valeurs déterminées des variables, les équations réduites coïncident exactement avec les équations proposées. Si donc on se reporte à ces valeurs particulières que Wronski appelle *valeurs moyennes*, les valeurs fondamentales $w_1, w_2, \ldots$, ou $F(w_1)$, ... représenteront exactement les fonctions inconnues y_1, y_2, ... ou $F(y_1)$, ...; on peut alors, pour ces systèmes spéciaux de valeurs, appliquer aux équations réduites les conditions du problème qui se rapportent aux équations proposées, et, par suite, on peut déterminer les constantes ou fonctions arbitraires, comme on le ferait si l'on savait traiter directement les équations proposées.

Nous dirons donc, comme nous l'avons déjà dit, que si les valeurs moyennes adoptées coïncident avec les valeurs initiales, lesquelles servent spécialement à déterminer les quantités arbitraires, on substituera les équations réduites aux équations proposées quand les variables prendront leurs valeurs initiales; les quantités arbitraires ainsi déterminées sont celles qui entrent immédiatement dans la composition des fonctions inconnues.

Si les valeurs moyennes choisies ne coïncident pas avec les valeurs initiales, les valeurs des variables indépendantes sont seules connues dans le système des valeurs moyennes; pour déterminer les valeurs correspondantes des inconnues, on peut provisoirement prendre les valeurs initiales comme valeurs moyennes et, en opérant comme il vient d'être indiqué, on calculera les fonctions inconnues correspondantes aux valeurs moyennes choisies comme on le ferait pour des valeurs quelconques déterminées. C'est ensuite que l'on pourra prendre à leur tour ces nouvelles valeurs comme valeurs initiales et déterminer les quantités arbitraires nouvelles pour ce nouveau système de valeurs initiales. On a de cette manière les quantités arbitraires qui entrent dans la composition des fonctions inconnues.

Enfin, dans le cas où l'on ne voudrait pas procéder de cette manière,

étant admis que les valeurs moyennes choisies ne coïncident pas avec les valeurs initiales, les quantités arbitraires seraient données par la résolution de systèmes d'équations primitives simultanées, ainsi que nous l'avons déjà vu. Nous n'insistons pas sur ce dernier moyen, parce que dans les applications il offre une très grande complication de calcul, seulement il faut observer que ce moyen est possible tout au moins, car l'intégration d'un système d'équations différentielles simultanées exige la résolution de plusieurs systèmes d'équations primitives simultanées, lesquels, ne comportant pas la détermination de quantités arbitraires (sauf celle des valeurs moyennes), peuvent être résolus directement.

Transformations relatives à la convergence; remarques. — Il reste encore à considérer la convergence de l'expression fondamentale $(103)_1$ ou (68). Pour ne pas trop nous répéter, nous dirons seulement que les fonctions $w_1, w_2, \ldots$ sont totalement arbitraires en principe, mais la convergence de $(103)_1$ dépend essentiellement de l'approximation de ces valeurs fondamentales par rapport aux inconnues $y_1, y_2, \ldots$.

En premier lieu, les réduites successives (11), ou *progrès de la génération neutre*, sont plus convergentes que l'expression (3), dans laquelle on prendrait un même nombre de termes; on aura donc avantage à employer ordinairement ces réduites, en substituant $(103)_1$ à (3). On a pour les deux premières, qui sont les plus usuelles (¹),

$$(106)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{F}(y_\alpha) &= \mathrm{F}w_\alpha - \varphi_\beta(w_\alpha)\frac{\left(\dfrac{d\,\mathrm{F}(w_\alpha)}{dx}\right)}{\left(\dfrac{d\varphi_\beta(w_\alpha)}{dx}\right)},\\ \mathrm{F}(y_\alpha) &= \mathrm{F}(w_\alpha) - \frac{\left(\dfrac{d\,\mathrm{F}(y_\alpha)}{dx}\right)}{\dfrac{\left(\dfrac{d\varphi_\beta(w_\alpha)}{dx}\right)}{\varphi_\beta(w_\alpha)} + \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\left(\dfrac{d^2\mathrm{F}(y_\alpha)}{dx^2}\right)}{\left(\dfrac{d\,\mathrm{F}(y_\alpha)}{dx}\right)} - \dfrac{\left(\dfrac{d^2\varphi_\beta(w_\alpha)}{dx^2}\right)}{\left(\dfrac{d_\beta(w_\alpha)}{dx}\right)}\right\}}. \end{aligned}\right.$$

Si les équations proposées contenaient des différences ou des diffé-

---

(¹) La troisième réduite est donnée plus loin, (107).

rentielles partielles, la transformation se ferait non sur $(103)_1$, mais sur une expression analogue à (68).

En second lieu, l'expression fondamentale est généralement très convergente pour les valeurs des fonctions inconnues qui sont peu éloignées des valeurs moyennes; on pourra donc changer de valeurs moyennes autant de fois qu'on le jugera nécessaire et calculer de cette manière toutes les valeurs des fonctions inconnues pour des variations des variables indépendantes aussi étendues qu'on le voudra.

En troisième lieu, on peut introduire des fonctions arbitraires, principalement celles de la forme se^{rx}, qui permettent d'obtenir une convergence rapide quand elles sont choisies convenablement.

En dernier lieu, on peut avoir recours à la méthode d'exhaustion, comme nous l'avons montré dans un exemple précédent.

Nous croyons utile de dire, à propos de cette méthode d'exhaustion, que Wronski distingue les méthodes suivantes [1]: les méthodes théoriques, les méthodes techniques et les méthodes d'approximation.

Dans les premières, les quantités cherchées sont données d'une manière absolue au moyen des seules données de la question, sans introduire de quantités arbitraires; la méthode suprême est dans ce cas. La propriété principale des expressions théoriques est de posséder le maximum de convergence; ces expressions sont finies quand la fonction cherchée le comporte, mais c'est un cas relativement très rare.

Nous ne pouvons indiquer ici que le caractère des méthodes théoriques, telles que les conçoit Wronski; des développements concernant la méthode suprême seraient nécessaires pour donner une idée complète de ces méthodes.

Dans les méthodes techniques, les quantités cherchées sont exprimées au moyen d'une ou plusieurs quantités arbitraires, comme cela a lieu, par exemple, dans la méthode secondaire que nous exposons.

Les expressions techniques se présentent généralement sous forme d'une suite indéfinie de termes; elles sont d'autant plus convergentes

---

[1] Nous nous plaçons ici à un point de vue particulier, autrement il faudrait citer encore (en dehors de la méthode relative à la théorie des nombres) la méthode d'interpolation qui permet de résoudre ou d'intégrer toutes sortes d'équations, étant donné un nombre suffisant de valeurs des fonctions inconnues.

que les quantités arbitraires sont mieux choisies. Les séries, suivant la définition de Wronski, sont des expressions techniques.

Le caractère distinctif des méthodes d'approximation, d'après Wronski, consiste « en ce que les accroissements successifs des différents termes qu'on calcule pour s'approcher continuellement ou indéfiniment de la quantité qu'on désire connaître, *ne sont liés par aucune loi*. C'est par là que cette méthode diffère des procédés techniques ; mais comme, dans cette méthode, les divers termes que nous venons de nommer doivent être calculés directement ou *a priori*, et non déduits par des essais ou *a posteriori*, cette méthode diffère également des simples méthodes de tâtonnement ». Ainsi une méthode d'approximation « se borne à nous conduire à des termes distincts ou séparés, de plus en plus approchants de la quantité qu'elle sert à nous faire connaître ; mais, les accroissements successifs de tous ces termes séparés n'étant liés par aucune loi, cette méthode ne saurait, par elle-même, embrasser l'ensemble de la génération des quantités ».

Sur la formation des équations différentielles. — Pour compléter la méthode secondaire, il serait utile d'ajouter quelques développements sur l'introduction des quantités arbitraires, constantes ou variables, dans les équations différentielles ; mais une question aussi importante et aussi délicate demande, pour être traitée convenablement, un espace plus considérable que celui dont nous disposons ici. Nous proposant d'y revenir plus loin, nous nous en tiendrons au résumé qui suit [1].

Nous prévenons d'abord que les équations différentielles dont nous nous occupons ne sont que les expressions de problèmes possibles ; nous ne considérerons jamais les équations qui seraient formées au hasard ou qui seraient supposées n'avoir d'autre origine.

Examinons, pour commencer, les équations qui contiennent les différentielles d'une quantité inconnue.

Ces équations sont composées essentiellement de deux choses distinctes en principe : les dérivées différentielles et les relations qui les

---

[1] Le passage suivant complète ce que nous avons dit de la formation des équations différentielles, dans la note qui sert d'introduction à l'intégration de ces équations, et rectifie en même temps ce qui a rapport au système d'équations désignées par (i).

unissent. Il faut donc considérer les dérivées différentielles en elles-mêmes, puis dans leurs relations possibles; telles sont les deux conditions premières de la question, les seules dont il faille nécessairement tenir compte.

Les dérivées seront considérées en elles-mêmes, si l'on tient compte d'une propriété qui les caractérise. Cette propriété est ici la disparition de certaines quantités par différentiation, quand ces quantités sont indépendantes des variables par rapport auxquelles on les différentie. Donc, en remontant des équations différentielles aux équations primitives, il faut rétablir les quantités qui ont disparu.

Les dérivées seront considérées dans leurs relations si l'on tient compte du mode de formation de ces relations. Or celles-ci ne proviennent que de la comparaison de quantités composées de dérivées, et toute comparaison entraîne l'élimination de certaines quantités; donc, pour passer d'une relation de dérivées différentielles à la relation équivalente de fonctions primitives, il faut rétablir les quantités qui ont disparu.

Ainsi, pour deux causes différentes, il faut introduire dans les intégrations d'équations différentielles certaines quantités qui n'existent pas dans ces équations; ces causes concourent toutes deux au même but sans que pour cela l'une puisse être substituée à l'autre. La première, qui provient de la nature des dérivées différentielles, présente une *nécessité générale*, et l'autre, qui provient du mode de formation des équations, présente une *possibilité* dépendant du *mode particulier* de formation des équations que l'on considère.

Il en résulte, d'un côté pour chaque ordre d'intégration, que l'on doit introduire généralement une fonction arbitraire (les constantes étant ici considérées comme formant un cas particulier des fonctions), et de l'autre on conçoit la possibilité d'en introduire plusieurs; le nombre de ces fonctions sera forcément indiqué dans chaque cas et ne dépendra que des conditions particulières des problèmes traités. On peut évaluer le nombre maximum des fonctions arbitraires qu'il est possible d'introduire, nombre considérable pour les équations d'ordres élevés; il suffit pour cela d'énumérer les conditions générales de formation des équations différentielles, et c'est ce que nous ferons en y joignant divers exemples.

Maintenant, si l'on distingue les conditions relatives à la formation des équations différentielles de celles qui sont relatives aux problèmes que ces équations représentent, ces deux espèces de conditions étant complètement hétérogènes, il est évident que les dernières doivent correspondre à un nombre de fonctions arbitraires compris entre le minimum et le maximum que l'on aura trouvé, pour que les problèmes soient possibles ou déterminés; mais, comme les conditions relatives aux problèmes ne peuvent être fixées *a priori*, c'est-à-dire ne peuvent l'être que dans chaque cas particulier, le nombre des fonctions arbitraires ne pourra être également fixé *a priori;* il n'y aura de déterminé que le nombre minimum de ces fonctions, lequel est nécessaire pour la possibilité des problèmes, puisque celui-ci doit être indépendant des conditions particulières, ou spéciales. Les intégrales générales seront donc celles qui contiendront le nombre minimum de fonctions arbitraires, c'est-à-dire celles qui contiendront μ fonctions arbitraires, pour l'ordre μ, car les conditions spéciales n'existent pas en général.

Le nom d'*intégrale complète* est donné aux intégrales qui ne contiennent que les valeurs initiales de la fonction inconnue et de toutes ses différentielles jusqu'à l'ordre μ, sauf l'une d'elles, qui est déterminée par l'équation même, dans le cas où l'inconnue est fonction de plusieurs variables indépendantes.

Les intégrales qui contiennent plus de μ fonctions arbitraires ne sont pas, à proprement parler, des intégrales générales, puisque, d'après ce qui précède, elles correspondent à des cas spéciaux.

Enfin, il existe d'autres sortes d'intégrales contenant des fonctions qui ne se trouvent pas dans les équations différentielles; ces fonctions ne sont plus arbitraires comme celles que nous venons de considérer, elles sont déterminées, ou partiellement déterminées, par certaines conditions qui se trouvent être remplies en dehors des conditions générales de formation des équations différentielles; c'est là leur caractère distinctif. Les intégrales désignées ordinairement sous le nom d'*intégrales singulières* sont comprises dans la précédente définition, mais celle-ci comprend une classe d'intégrales bien plus étendue. D'après cela, les intégrales semi-singulières devraient être celles qui contiennent des fonctions partiellement déterminées par des conditions singulières.

Dans le cas plus complexe d'un système d'équations simultanées, ce que nous venons de dire s'applique également. Les intégrales générales

sont les plus importantes à examiner : pour un système d'équations où les inconnues entrent respectivement aux ordres $\mu_{1,1}$, $\mu_{1,2}$, ..., $\mu_{1,\lambda}$ dans la première, aux ordres $\mu_{2,1}$, $\mu_{2,2}$, ..., $\mu_{2,\lambda}$ dans la seconde, et ainsi de suite, on pourra déterminer l'une des inconnues y_α au moyen de la $\beta^{\text{ième}}$ relation ; son ordre de différentielles le plus élevé étant $\mu_{\beta\alpha}$ d'après cette notation, il faudra introduire généralement $\mu_{\beta\alpha}$ fonctions arbitraires dans l'intégration ; mais l'intégrale obtenue comprendra d'autres inconnues y_γ, y_ε, ... supposées déterminées respectivement par les relations φ_δ, φ_ζ, ... où elles entrent aux ordres $\mu_{\delta\gamma}$, $\mu_{\zeta\varepsilon}$, ..., de sorte que l'intégrale qui donne y_α contiendra en tout $\mu_{\beta\alpha}+\mu_{\delta\gamma}+\mu_{\zeta\varepsilon}+\ldots$ fonctions arbitraires, et avec cette intégrale on déterminera spécialement $\mu_{\beta\alpha}$ de ces fonctions [1].

On sera ordinairement guidé dans le choix de l'équation qui devra servir à la détermination de l'une des inconnues, car il faut ne pas oublier que les ordres de différentielles des inconnues qui entrent dans les équations n'y sont pas répartis arbitrairement : ils sont au contraire disposés en vue de satisfaire aux conditions du problème que l'on traite ; mais, en supposant que ce choix ne soit pas indiqué, on pourra prendre n'importe quelle équation du système et l'on obtiendra généralement la solution voulue. Il peut arriver que le problème comporte une certaine indétermination provenant de la combinaison des équations du système proposé, ou qu'il exige des intégrales qui contiennent plus de fonctions arbitraires qu'il n'y en aurait dans l'intégrale générale ; en tout cas, il ne sera possible de trancher la question que dans chaque cas particulier.

Il y a, d'ailleurs, pour les équations différentielles simultanées une difficulté qui tient aux combinaisons possibles des équations du problème, lesquelles correspondent à des combinaisons des équations primitives ; il y a donc un nombre indéfini de systèmes équivalents d'équations primitives qui correspondent à un système donné d'équations différentielles simultanées ; le plus souvent les intégrales seront mises sous la forme $y=f(x)$, mais ce n'est là qu'une forme particu-

---

(1) Nous entendons parler de l'ordre réel des équations différentielles, et non de l'ordre fictif dû à la manière dont elles sont disposées ; le calcul des constantes des équations (37), formules (42 à 46)', dans le septième exemple que nous allons donner, précisera ce que nous disons.

lière : la forme générale est évidemment $F(x, y_1, y_2, \ldots, y_\lambda) = 0$, ou plus simplement $F(y_\alpha) = 0$, d'après la notation que nous avons adoptée; l'expression fondamentale (103) tient compte de cette indétermination, qui ne peut cesser qu'à la suite de l'examen particulier du problème proposé.

Si nous examinons maintenant les équations qui contiennent des différences finies, on verrait, comme le dit Wronski, que ce que nous venons de dire des équations différentielles peut être étendu immédiatement, par une simple induction, aux équations de différences, sans autre considération que celle qui est relative à la nature des constantes arbitraires.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que les équations qui contiennent des différences ou des différentielles des inconnues, mais il est visible que la méthode de Wronski peut s'appliquer aux équations qui contiennent en même temps que les inconnues des fonctions composées avec ces inconnues suivant une loi déterminée. On indique souvent les opérations successives que l'on effectue d'après la même loi sur une fonction, par un indice joint à la caractéristique de cette fonction : ce sont les équations qui contiennent des fonctions à indices que l'on pourrait résoudre sans difficulté par la méthode de Wronski. Cependant ce genre d'équations se ramène au fond à un système d'équations simultanées, et il pourra quelquefois être plus avantageux de traiter ces équations simultanées comme telles.

Ici nous terminons ce que nous avions à dire de l'ensemble de la méthode de Wronski. On trouvera peut-être un peu concises les explications qui précèdent, mais on pourra les juger suffisantes en considérant qu'elles se rapportent à l'application de principes dont nous avons constamment fait usage; d'ailleurs, les exemples et le résumé que nous allons donner encore nous permettront de revenir sur les points importants.

SUITE ET FIN DU SIXIÈME EXEMPLE.

Détermination des fonctions arbitraires. — Pour achever l'intégration de l'équation du mouvement vibratoire des gaz, il reste à déterminer les fonctions arbitraires $F_1(r + at)$ et $F_2(r - at)$.

Les deux variables, quantités essentiellement positives, sont : r, dis-

tance d'un point de la masse gazeuse au centre de vibration, et t, temps. $r + at$ est toujours positif, et $r - at$ peut être positif ou négatif. Dans le premier cas, en faisant $t = 0$, les fonctions arbitraires sont déterminées par le système des équations simultanées (τ) ou (τ)'. Mais, dans le deuxième cas, $r - at$ étant négatif, on peut supposer $r = 0$, et faire $at = z$, quantité positive; on remarquera alors, d'après Poisson, que les conditions précédentes (τ) ne peuvent servir à déterminer la fonction $F_2(-z)$: il faut recourir au système d'équations (ς), et celui-ci fera connaître $F_2(-z)$ au moyen de $F_1(z)$, fonction donnée par les relations (τ), la variable z pouvant être substituée à r.

En conséquence, si l'on prend, dans l'expression fondamentale (68) ou (ϑ), un nombre de termes tel qu'il faille calculer n dérivées des fonctions F_1 et F_2, il faudra, en plus des deux relations (ς), $f = 0$ et $V = 0$, pour $r = 0$, écrire $n - 1$ relations qui proviendront des $n - 1$ premières dérivées de V prises par rapport à r et égalées à zéro, en faisant ensuite $r = 0$, puisque le centre d'ébranlement est supposé immobile. On aura de cette manière un système de $n + 1$ équations simultanées d'où l'on tirera la fonction $F_2(-z)$ et ses n dérivées en fonction de $F_1(z)$ et de ses dérivées [1].

Pour résoudre ce système, on pourra prendre comme valeurs fondamentales celles qui sont données par les relations

$$F_1(z) + F_2(-z) = 0,$$

$$\frac{dF_1(z)}{dz} - \frac{dF_2(-z)}{dz} = 0,$$

que Poisson indique, et par les $n - 1$ dérivées suivantes égalées à zéro.

Mais revenons au système (τ) ou (τ)', dans lequel $F_1(r)$ et $F_2(r)$ sont déterminés au moyen des fonctions données $\Psi_1(r)$ et $\Psi_2(r)$. Si l'on compare ce système, savoir :

$$\left.\begin{array}{l} \Psi_1(r) - V = 0 \\ \Psi_2(r) - \gamma = 0 \end{array}\right\} \text{ pour } t = 0,$$

au système (100), la solution sera fournie par l'expression $(103)_1$ dans

---

[1] La fonction $F_2(-z)$ et ses dérivées se présentent ici sous une forme technique; il en est d'ailleurs de même de $F_1(z)$ et $F_2(z)$.

laquelle on fera

$$F(y_\alpha) = F_1(r) \quad \text{ou} \quad F_2(r),$$
$$F(w_\alpha) = \mathcal{F}_1(r) \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}_2(r);$$

on aura donc, en prenant la première équation pour déterminer $F_1(r)$ et la seconde pour $F_2(r)$,

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} F_1(r) &= \mathcal{F}_1(r) - \frac{\Psi_1(r) - V'}{\left(\dfrac{d[\Psi_1(r) - V']}{d\mathcal{F}_1(r)}\right)} + \cdots, \\ F_2(r) &= \mathcal{F}_2(r) - \frac{\Psi_2(r) - \gamma'}{\left(\dfrac{d[\Psi_2(r) - \gamma']}{d\mathcal{F}_2(r)}\right)} + \cdots; \end{aligned} \right.$$

nous mettons V' et γ' au lieu de V et γ pour marquer que l'on substitue $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ à F_1 et F_2, toujours avec la condition $t = 0$; les dérivées sont prises par rapport à $\mathcal{F}_1(r)$ et $\mathcal{F}_2(r)$ seulement, en considérant $\mathcal{F}_2(r)$ comme fonction de $\mathcal{F}_1(r)$ dans la première expression, et $\mathcal{F}_1(r)$ comme fonction de $\mathcal{F}_2(r)$ dans la seconde.

Les quantités V' et γ' doivent être remplacées par leurs valeurs, comme dans $(\tau)'$; et, puisque F_1 et F_2 sont remplacés par $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, en vertu de $(\tau)''$, on a

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi_1(r) - \zeta' &= 0, \\ \Psi_2(r) - s' &= 0, \end{aligned} \right.$$

pour $t = 0$, ce qui simplifie les expressions $(\tau)'$ ou les seconds termes de (a).

Pour les dérivées de V' et de γ' par rapport à $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, il faudra prendre celles des quantités ψ, ζ et η, d'après (μ), (ν) et $(\nu)'$, par rapport à F_1 et F_2, et en faisant usage de $(\sigma)'$, savoir :

$$(b)' \qquad s = -\frac{\eta}{a^2};$$

on fera ensuite la substitution de $\mathcal{F}$ à F.

On aura donc, comme pour (ρ),

$$(c) \quad \left(\frac{dV'}{d\mathcal{F}_1}\right) = \left(\frac{d\zeta'}{d\mathcal{F}_1}\right) - \varphi(\psi') \frac{\left(\dfrac{d^2\zeta'}{dt\, d\mathcal{F}_1}\right)\zeta' + \left(\dfrac{d^2\zeta'}{dr\, d\mathcal{F}_1}\right)\eta'}{\left(\dfrac{d\varphi(\psi')}{dt}\right)\zeta' + \left(\dfrac{d\varphi(\psi')}{dr}\right)\eta'} + \cdots,$$

nous écrivons $\mathfrak{F}$ pour $\mathfrak{F}(r)$, pour simplifier; par suite, en substituant, dans la première expression (a), les valeurs données par $(\tau)'$ et (c), il vient, en ne prenant que la partie écrite de ces expressions et en ayant égard à (b),

$$F_1(r) = \mathfrak{F}_1(r) - \frac{\left(\frac{d\zeta'}{dt}\right)\zeta' + \left(\frac{d\zeta'}{dr}\right)\eta'}{\left(\frac{d^2\zeta'}{dt\,d\mathfrak{F}_1}\right)\zeta' + \left(\frac{d^2\zeta'}{dr\,d\mathfrak{F}_1}\right)\eta'} + \cdots$$

ou, d'après (b) et $(b)'$,

$$(d) \qquad F_1(r) = \mathfrak{F}_1(r) - \frac{\left(\frac{d\Psi_1}{dt}\right)\Psi_1 - a^2\left(\frac{d\Psi_1}{dr}\right)\Psi_2}{\left(\frac{d^2\Psi_1}{dt\,d\mathfrak{F}_1}\right)\Psi_1 - a^2\left(\frac{d^2\Psi_1}{dr\,d\mathfrak{F}_1}\right)\Psi_2} + \cdots;$$

nous écrivons encore, pour simplifier, Ψ pour $\Psi(r)$.

Pour la seconde expression (a), faisons, d'après $(\theta)'$,

$$\chi(s) = b^2(1+s)^{\frac{c}{c'}-1} + \eta + \tfrac{1}{2}\zeta^2,$$

nous aurons, comme pour $(\rho)'$,

$$(e) \qquad \left(\frac{d\gamma'}{d\mathfrak{F}_2}\right) = \left(\frac{ds'}{d\mathfrak{F}_2}\right) - \chi(s')\frac{\left(\frac{d^2 s'}{d\mathfrak{F}_2^2}\right)}{\left(\frac{d\chi(s')}{d\mathfrak{F}_2}\right)} + \cdots;$$

le second terme peut s'écrire

$$\chi(s')\frac{\left(\frac{d^2 s'}{d\mathfrak{F}_2^2}\right)}{\left[a^2(1+s)^{\frac{c}{c'}-2}\right]\left(\frac{ds'}{d\mathfrak{F}_2}\right)};$$

par suite, substituant les premiers termes de (e) dans la seconde expression (a) et tenant compte de $(\tau)'$ et (b), il vient

$$(f) \qquad F_2(r) = \mathfrak{F}_2(r) - \frac{\left(\frac{d\Psi_2}{d\mathfrak{F}_2}\right)}{\left(\frac{d^2\Psi_2}{d\mathfrak{F}_2^2}\right)} + \cdots.$$

Il reste encore à calculer les dérivées qui entrent dans les expressions (d) et (f); pour cela, on a généralement, pour le premier ordre de

dérivation,

$$\frac{d\Psi}{d\mathcal{F}} = \frac{d\Psi}{dr}\frac{1}{\frac{d\mathcal{F}}{dr}};$$

par suite, la dérivée de $\Psi_2(r)$, par exemple, $\Psi_2(r)$ étant donné par (φ), sera

$$\left(\frac{d\Psi_2(r)}{d\mathcal{F}_2(r)}\right) = -\frac{1}{r}\left(\frac{d^2\mathcal{F}_1}{dr^2}\frac{1}{\frac{d\mathcal{F}_2}{dr}} - \frac{d^2\mathcal{F}_2}{dr^2}\frac{1}{\frac{d\mathcal{F}_2}{dr}}\right);$$

$\mathcal{F}_1(r)$ est ici considéré comme fonction de $\mathcal{F}_2(r)$.

On opérerait d'une façon analogue pour la dérivée de Ψ_1 et les dérivées supérieures. Quant aux dérivées de Ψ_1 par rapport à t qui entrent dans (d), pour les obtenir, il suffira de supposer que dans la première expression $(\tau)''$ on ait mis $\mathcal{F}_1(r+at)$ au lieu de $\mathcal{F}_1(r)$ et $\mathcal{F}_2(r-at)$ au lieu de $\mathcal{F}_2(r)$, et de substituer ensuite les différentielles de r à celles de at, ainsi qu'on l'a fait pour passer de la seconde relation $(\tau)''$ à la relation (φ).

On calculera de cette manière toutes les dérivées qui entrent dans les expressions (d) et (f) donnant les fonctions arbitraires cherchées. On remarquera que ces fonctions se présentent sous forme de développements indéfinis, ce qui est dû à leur forme technique et aussi à ce qu'elles sont des fonctions essentiellement transcendantes.

On suivrait une marche tout à fait semblable à celle qui précède pour avoir la fonction $F_2(-z)$ et ses dérivées au moyen de $F_1(z)$ et des dérivées de cette dernière fonction.

Nous avons ainsi achevé la résolution des équations simultanées qui devait compléter l'intégration de l'équation proposée (θ), et les inconnues du problème V et γ sont maintenant déterminées avec toute l'exactitude qu'on peut désirer.

SEPTIÈME EXEMPLE. — *Calcul du profil d'égale résistance d'un mur de barrage.*

Conditions du problème. — Nous nous proposons de calculer le profil d'un mur de réservoir construit dans des conditions telles que les

pressions exercées sur les matériaux, dans les parties les plus fatiguées, soient égales ou inférieures à une pression donnée.

Nous n'envisagerons la question qu'au point de vue du calcul : elle a d'ailleurs été l'objet de Mémoires spéciaux. Nous nous bornerons donc à établir les équations du problème afin de les résoudre et de montrer par là que la méthode de Wronski, loin d'être illusoire, permet de surmonter de véritables difficultés.

La marche que nous allons suivre pour arriver aux équations à résoudre est analogue à celle qui est indiquée par M. Delocre dans son Mémoire *Sur la forme du profil à adopter pour les grands barrages en maçonnerie des réservoirs* (1). Ce travail, justement apprécié, a été composé lors de l'étude du barrage du Furens au Gouffre d'Enfer, près de Saint-Étienne (barrage de Rochetaillée). Plus tard, en examinant les procédés d'exécution du second barrage du Furens, au Pas-du-Rio, nous avons eu l'idée d'appliquer les méthodes de Wronski au calcul du profil théorique des murs de cette espèce.

Pour l'objet que nous avons en vue, il suffira de considérer le cas d'un barrage droit, dans une large vallée, résistant par son seul poids à la poussée de l'eau; l'ouvrage se composera alors de trois parties.

Dans la partie supérieure OGIJ (*fig.* 1), le mur devant avoir une certaine épaisseur, il ne peut exister de profil théorique; le mur sera un mur ordinaire à parements verticaux. Le profil théorique ne commencera que lorsque, par suite de la poussée de l'eau, la partie la plus fatiguée de la maçonnerie subira la pression que l'on s'est assignée d'avance. La seconde partie du mur, IJKL, présente un parement vertical en amont et de l'autre côté un parement courbe jouissant de la propriété d'égale résistance; la pression la plus forte est en L lorsque le réservoir est plein, et, lorsqu'il est vide, cette pression se reportant en K ne doit pas excéder la pression maxima admise. Cette pression atteinte, les deux parements du mur s'infléchissent, et les deux profils sont déterminés par la condition que les pressions le long de la ligne LB soient constantes lorsque le réservoir est plein, et que les pressions le long de al ligne KA soient aussi constantes lorsque le réservoir est vide.

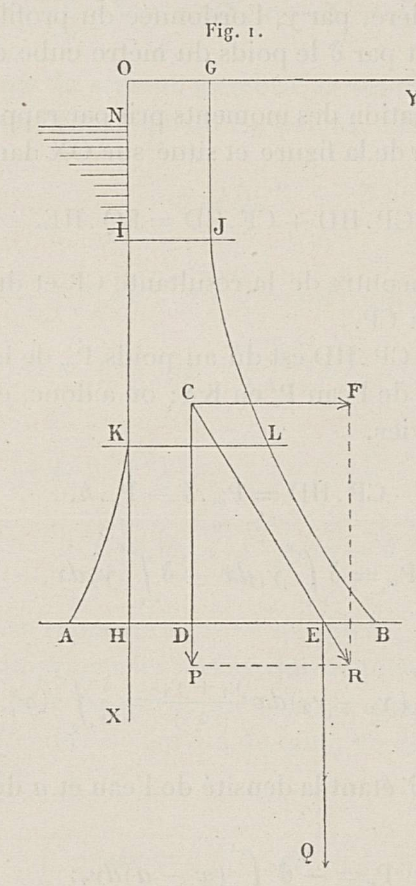
---

(1) *Annales des Ponts et Chaussées,* 4e série, t. XII (1866), n° 135, p. 212.

La délimitation de ces trois parties du mur offre un certain intérêt au point de vue du calcul.

Dans le calcul du profil, il faut tenir compte de la stabilité du mur et de la résistance des matériaux; la stabilité est définie par l'égalité des moments des forces pris par rapport à un axe, et la résistance comprend le glissement suivant une section déterminée et l'écrasement

Fig. 1.



dans cette section. Nous ne tiendrons pas compte du glissement, et même nous ne considérerons l'écrasement que dans les sections horizontales ou assises fictives, comme cela se pratique ordinairement.

Considérons une section du mur OGAB (*fig.* 1) dont la largeur soit de 1^m, N étant le niveau normal de l'eau du réservoir et AB le joint fictif considéré; nous prendrons pour axes de coordonnées l'horizon-

tale OY à la partie supérieure du mur, et la verticale OX formant une partie du profil d'amont.

Soit C le point d'application de la résultante CR des forces; CF est la résultante des actions horizontales, la poussée de l'eau, et CP la résultante des actions verticales, le poids de la maçonnerie et la pression de l'eau sur la partie KA; nous désignerons par x la hauteur du mur jusqu'au joint considéré, par y_1 l'ordonnée du profil d'aval et y_2 celle du profil d'amont, et par δ le poids du mètre cube de maçonnerie.

Stabilité. — La relation des moments pris par rapport à l'axe H, perpendiculaire au plan de la figure et situé sur OX dans le plan du joint AB, est

$$\mathrm{CP}.\mathrm{HD} + \mathrm{CF}.\mathrm{CD} = \mathrm{EQ}.\mathrm{HE}.$$

E est le point de rencontre de la résultante CR et du joint AB, et EQ est égal et parallèle à CP.

Le premier terme, CP.HD est dû au poids P_m de la maçonnerie et à la pression verticale de l'eau P_e en KA; on a donc, en désignant par k et h leurs bras de levier,

$$\mathrm{CP}.\mathrm{HD} = P_m.k - P_e.h,$$

et ensuite

$$P_m = \delta\int_0^x y_1\,dx - \delta\int_0^x y_2\,dx,$$

ce qui donne

$$P_m.k = \delta\int_0^x (y_1 - y_2)\,dx\,\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{\delta}{2}\int_0^x (y_1^2 - y_2^2)\,dx.$$

Pour la quantité P_e, δ' étant la densité de l'eau et a désignant ON, on a

$$P_e = -\,\delta'\int_a^x (x - a)\,dy_2;$$

les limites de l'intégrale pourraient être o et x, ce qui revient au même; la somme des moments est ainsi

$$P_e\ h = \delta'\int_a^x (x - a)\,dy_2 . y_2 = \delta'\int_a^x (x - a)\,y_2\,dy_2.$$

Pour ce qui concerne le second terme, l'action horizontale est due seulement à l'eau; X étant l'abscisse courante, on a

$$CD = \delta' \int_a^x (X - a)\,dX,$$

et, pour le moment,

$$CF.CD = \delta' \int_a^x (X - a)\,dX(x - X) = \frac{\delta'}{6}(x - a)^3.$$

Enfin, pour le terme du second membre, la somme des actions verticales est $P_m + P_e$, et, en désignant EB par u_1, EH est $y_1 - u_1$; donc, en faisant

$$\theta = \frac{\delta'}{\delta},$$

on a

$$\frac{1}{2}\int_0^x y_1^2\,dx - \frac{1}{2}\int y_2^2\,dx - \theta \int_a^x (x-a) y_2\,dy_2 + \frac{\theta}{6}(x-a)^3$$
$$= \left[\int_0^x y_1\,dx - \int_0^x y_2\,dx - \theta \int_a^x (x-a)\,dy_2\right](y_1 - u_1),$$

d'où

$$(1) \qquad u_1 = y_1 - \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x y_1^2\,dx - \int_0^x y_2^2\,dx - 2\theta \int_a^x (x-a) y_2\,dy_2 + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{\displaystyle\int_0^x y_1\,dx - \int_0^x y_2\,dx - \theta \int_a^x (x-a)\,dy_2}.$$

Cette valeur du u_1 se rapporte au réservoir plein; dans le cas du réservoir vide, il faut supprimer les termes qui tiennent compte de la pression de l'eau; ce sont ceux qui contiennent la quantité θ en facteur: le point C est alors le centre de gravité du mur; en désignant par u_2 la valeur de AD, il vient

$$\frac{1}{2}\int_0^x y_1^2\,dx - \frac{1}{2}\int_0^x y^2\,dx = \left(\int^x y_1\,dx - \int_0^x y_2\,dx\right)(y_2 + u_2),$$

d'où

$$(2) \qquad u_2 = -y_2 + \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x y_1^2\,dx - \int_0^x y_2^2\,dx}{\displaystyle\int_0^x y\,dx - \int_0^x y_2\,dx}.$$

Les expressions (1) et (2) donnent les deux conditions de stabilité, pourvu que le point E se trouve dans l'intérieur du joint.

Résistance. — Aux conditions précédentes il faut joindre celles qui se rapportent à la conservation des matériaux employés en limitant la pression qu'ils ont à subir. A cet effet, il faut chercher le mode de répartition des pressions sur l'étendue du joint considéré; le principe fondamental dont on fait usage est connu sous le nom de *loi du trapèze*. On admet que les composantes des pressions normales au joint varient suivant une fonction linéaire, de telle sorte que, si ces composantes sont représentées en grandeur et en direction par des lignes droites partant du joint, elles formeront un trapèze par leur ensemble. Il s'ensuit que la résultante des pressions normales au joint passe par le centre de gravité du trapèze.

Dans les constructions en maçonnerie, on néglige les pressions négatives ou tractions; quand elles existent, les deux côtés non parallèles du trapèze se coupent dans l'intérieur du joint, et le trapèze se compose, en réalité, de deux triangles. D'après ce qui vient d'être dit, on néglige le triangle qui correspond aux efforts de traction, et la loi du trapèze dégénère en *loi du triangle*.

Les forces étant réparties sur le joint suivant ces conditions, la plus grande pression a lieu à l'extrémité du joint le plus rapproché du centre de gravité du *trapèze* ou du *triangle*. Si u est la distance de la pression résultante à l'extrémité la plus fatiguée du joint et l la longueur du joint, la loi du trapèze sera applicable quand on aura $u > \frac{l}{3}$; la loi du triangle le sera dans le cas contraire où $u < \frac{l}{3}$.

Cela posé, si l'on désigne par p la pression par mètre superficiel au point le plus fatigué, et P la résultante des forces normales au joint, on trouve les formules suivantes, qui sont bien connues : dans le cas du trapèze,

$$u > \frac{l}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad p = 2\left(2 - \frac{3u}{l}\right)\frac{P}{l};$$

et dans le cas du triangle,

$$u < \frac{l}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad p = \frac{2}{3}\frac{P}{u}.$$

On peut, à la place de p, introduire la hauteur λ d'un mur à faces verticales dont la pression sur sa base serait p pour 1^m superficiel; cette pression est alors exprimée par $\delta\lambda$. D'après cela, on a, dans le premier cas,

$$u = \frac{2}{3}l - \frac{\delta\lambda}{6}\frac{l^2}{P},$$

et, dans le second cas,

$$u = \frac{2}{3}\frac{P}{\delta\lambda}.$$

Remplaçant maintenant l par sa valeur $y_1 - y_2$ et P par $P_m + P_e$, ou P_m, on aura, dans le cas du réservoir plein,

$$(3)\qquad u_1 = \frac{2}{3}(y_1 - y_2) - \frac{\lambda}{6}\frac{(y_1 - y_2)^2}{\int_0^x y_1\,dx - \int_0^x y_2\,dx - \theta\int_a^x (x-a)\,dy_2},$$

ou

$$(4)\qquad u_1 = \frac{2}{3}\frac{\int_0^x y_1\,dx - \int_0^x y_2\,dx - \theta\int_a^x (x-a)\,dy_2}{\lambda},$$

et, dans le cas du réservoir vide,

$$(5)\qquad u_2 = \frac{2}{3}(y_1 - y_2) - \frac{\lambda}{6}\frac{(y_1 - y_2)^2}{\int_0^x y_1\,dx - \int_0^x y_2\,dx},$$

ou

$$(6)\qquad u_2 = \frac{2}{3}\frac{\int_0^x y_1\,dx - \int_0^x y_2\,dx}{\lambda};$$

telles sont les deux doubles conditions de résistance.

Équations du problème. — Les équations du problème s'obtiendraient immédiatement en éliminant u_1 et u_2 entre les équations (1) et (3) ou (4), et entre les équations (2) et (5) ou (6); mais il est inutile de les écrire de suite. Nous allons changer de notations; pour simplifier

l'écriture, nous ferons

$$z_1 = \int_0^x y_1\,dx, \quad z_2 = \int_0^x y_2\,dx,$$

puis

$$y_1 = z'_1, \quad y_2 = z'_2, \quad dy_1 = z''_1\,dx, \quad dy_2 = z''_2\,dx, \quad \ldots,$$

et les expressions précédentes deviennent respectivement

$$(7)\quad u_1 = z'_1 - \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x z'^2_1\,dx - \int_0^x z'^2_2\,dx - 2\theta\int_0^x (x-a)\,z'_2\,z''_2\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)\,z''_2\,dx},$$

$$(8)\quad u_2 = -z'_2 + \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x z'^2_1\,dx - \int_0^x z'^2_2\,dx}{z_1 - z_2},$$

$$(9)\quad u_1 = \frac{2}{3}(z'_1 - z'_2) - \frac{\lambda}{6}\,\frac{(z'_1 - z'_2)^2}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)\,z''_2\,dx},$$

$$(10)\quad u_1 = \frac{2}{3\lambda}\left[z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)\,z''_2\,dx\right],$$

$$(11)\quad u_2 = \frac{2}{3}(z'_1 - z'_2) - \frac{\lambda}{6}\,\frac{(z'_1 - z'_2)^2}{z_1 - z_2},$$

$$(12)\quad u_2 = \frac{2}{3\lambda}(z_1 - z_2).$$

Nous ferons usage de ces expressions avec les intégrales définies qu'elles contiennent. Dans l'application numérique, nous supposerons que la largeur b du mur au sommet est de 5^{m}, que le niveau de l'eau se maintient à une distance a de 5^{m} en dessous du sommet du mur, et que la pression que doivent supporter les matériaux ne dépasse pas 6^{kg} par centimètre carré, de sorte que, si la densité δ de la maçonnerie est 2, la hauteur λ est 30^{m}.

Avec ces données, nous allons effectuer le calcul du mur successivement pour ses trois parties principales.

Première partie. — Nous avons vu que, dans la partie supérieure du

mur, il ne pouvait y avoir de profil d'égale résistance : ce que l'on doit se proposer de connaître est la hauteur à partir de laquelle commence le profil théorique, c'est-à-dire la position du point J pour lequel la pression est $\partial\lambda$.

Dans cette partie du mur, on a

$$z'_1 = b \quad \text{et} \quad z'_2 = 0;$$

de plus, les expressions qu'il faut employer sont (7) et (9) ou (7) et (10), suivant qu'il faut faire usage de la loi du trapèze ou de la loi du triangle. Dans la partie supérieure du mur, on doit évidemment appliquer la première loi, et la seconde n'est utile que pour des hauteurs un peu considérables. Le choix entre (9) et (10) peut être fait de la manière suivante : donnant à u_1 la valeur $\frac{b}{3}$ dans (7), cette expression se réduit à

$$\theta(x-a)^3 - b^2x = 0,$$

ou, si l'on fait $x - a = X$, il vient

$$\theta X^3 - b^2 X - b^2 a = 0.$$

En mettant pour a, b, θ leurs valeurs, on obtient l'équation du troisième degré

$$X^3 - 50X - 250 = 0,$$

dont il suffit d'évaluer l'unique racine positive.

L'expression fondamentale donne, pour cela,

$$X = \varpi - \frac{\varphi(\varpi)}{\frac{d\varphi(\varpi)}{d\varpi}} + \cdots$$

Ces deux premiers termes suffisent; on a donc

$$\varphi(X) = X^3 - 50X - 250,$$

$$\frac{d\varphi(X)}{dX} = 3X^2 - 50.$$

Or la racine cherchée est comprise entre 8 et 9, et est plus rapprochée

de 9; faisant ainsi

$$w = 9,$$

on a

$$\varphi(w) = +\ 29,$$

$$\frac{d\varphi(w)}{dw} = +193,$$

dont le rapport est 0, 150, par suite

$$X = 9 - 0,15 = 8,85$$

et

$$x = 5 + 8,85 = 13,85.$$

Portant cette valeur dans (10), cette expression devient

$$\frac{1}{3}b = \frac{2}{3\lambda}bx;$$

on en déduit

$$\lambda = 2x = 27,70.$$

Ainsi, pour la valeur de u_1 égale à $\frac{1}{3}b$, la pression, au point le plus fatigué du joint qui est à $13^m,85$ du sommet, est égale à la pression qui se produit sur la base d'un mur droit de $27^m,70$ de hauteur; cette pression étant inférieure à la limite que l'on s'est fixée, 30^m, il en résulte que la hauteur de la première partie du mur est donnée par les expressions (7) et (10). Ces expressions deviennent, en mettant pour z et z'_1 leurs valeurs bx et b,

$$u_1 = b - \frac{1}{2}\frac{b^2x + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{bx},$$

$$u_1 = \frac{2}{3\lambda}bx.$$

En éliminant u_1, il vient

$$(13) \qquad \frac{1}{2}b - \frac{2}{3\lambda}bx - \frac{\theta}{6bx}(x-a)^3 = 0$$

ou, en faisant $X = x - a$,

$$(13)' \qquad \theta X^3 + \frac{4b^2}{\lambda}X^2 - 3b^2\left(1 - \frac{8a}{3\lambda}\right)X - 3b^2a\left(1 - \frac{4a}{3\lambda}\right) = 0.$$

Si l'on remplace les coefficients par leurs valeurs, l'équation à résoudre est alors

$$(13)'' \qquad X^3 + X^2 \frac{2}{3}10 - X\frac{2}{3}125 - \frac{2}{3}875 = 0;$$

de même que l'équation précédente, celle-ci a une racine positive et deux racines imaginaires.

Pour simplifier l'écriture, nous ferons usage de la notation des dérivées, ce qui n'aura aucun inconvénient maintenant que l'on connaît la signification des formules précédentes. Le second *progrès de la génération neutre* donne pour l'expression fondamentale

$$X = \varpi - \frac{1}{\frac{\varphi'(\varpi)}{\varphi(\varpi)} - \frac{1}{2}\frac{\varphi''(\varpi)}{\varphi'(\varpi)}};$$

et l'on a

$$\varphi(X) = X^3 + X^2\frac{20}{3} - X\frac{250}{3} - \frac{1750}{3},$$

$$\varphi'(X) = 3X^2 + X\frac{40}{3} - \frac{250}{3},$$

$$\varphi''(X) = 6X + \frac{40}{3}.$$

La racine positive est comprise entre 9 et 10; faisant donc $\varpi = 9$, on a

$$\varphi(\varpi) = -\ 64,333,$$

$$\varphi'(\varpi) = +\ 279,666,$$

$$\varphi''(\varpi) = +\ 67,333;$$

d'où

$$\frac{\varphi'(\varpi)}{\varphi(\varpi)} = -4,3471, \quad \frac{\varphi''(\varpi)}{\varphi'(\varpi)} = +0,2413;$$

la racine est ainsi

$$X = 9 + \frac{1}{4,4677} = 9,2238.$$

Cette valeur est exacte à moins d'un millimètre; on en déduit la

hauteur cherchée en ajoutant 5^{m},

(14) $$x = 14^{m},2238;$$

puis le cube de maçonnerie est

(14)' $$z = 71^{mc},1191,$$

enfin la valeur de u_1, d'après (7), est

$$u_1 = 1^{m},5804,$$

valeur inférieure au tiers de la longueur du joint $1^{m},666$; comme vérification, on trouve, pour λ, d'après (10), $\lambda = 30,000$.

Seconde partie. — Le calcul de la seconde partie du mur consiste à calculer le profil théorique de la partie JL et à en déterminer la limite L.

Nous avons encore pour toute cette portion du mur

$$z_2 = 0, \quad z'_2 = 0, \quad z''_2 = 0, \quad \ldots;$$

en supprimant l'indice des fonctions z_1; et faisant

$(15)_1$ $$h = \frac{2}{3\lambda} = \frac{1}{45} \quad \text{ou} \quad 0,02222,$$

les expressions (7) et (10) donneront

(15) $$\begin{cases} u_1 = z' - \dfrac{1}{2} \dfrac{\displaystyle\int_0^x z'^2\,dx + \dfrac{\theta}{3}(x-a)^3}{z}, \\ u_1 = hz; \end{cases}$$

le choix de ces expressions est indiqué d'après ce qui précède. En éliminant u_1, il vient

(16) $$z' - hz - \frac{1}{2} \frac{\displaystyle\int_0^x z'^2\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{z} = 0,$$

équation différentielle qu'il s'agit d'intégrer.

Cette équation ne diffère pas de l'équation (12) du Mémoire de M. Delocre; cet ingénieur ajoute (p. 225) :

Nous avons cherché à intégrer les formules (11) [1] et (12), mais nous n'avons pu y parvenir par une méthode exacte : il nous a seulement été possible d'obtenir y développé en série en fonction de x; la série qui convient à l'équation (11) est de la forme

$$y = ax^{\frac{3}{2}} + bx^{\frac{5}{2}} + cx^{\frac{7}{2}} + \ldots;$$

celle qui convient à l'équation (12) est de la forme

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots.$$

Nous avions calculé les coefficients des premiers termes en admettant pour θ et λ les valeurs

$$\theta = \frac{1}{2}, \quad \lambda = 30.$$

Mais il nous a paru inutile de reproduire ici ces calculs; les formules ci-dessus ne peuvent, en effet, être d'aucune utilité pour arriver à déterminer un profil pratique ; elles ne conviennent qu'à la portion CN (*lisez* JL) de la courbe intérieure de la *fig.* 8 (*lisez fig.* 1) et les calculs auxquels on serait conduit pour déterminer les deux courbes NPB, MLS (*lisez* KA, LB) de la partie inférieure du profil sont tout à fait impraticables, même en ayant recours aux méthodes approchées.

Nous citons ce passage pour bien préciser l'insuffisance des méthodes dont on dispose, en dehors de celles que nous faisons connaître; après l'examen des calculs que nous présentons, on pourra constater un progrès réel dû aux travaux de Wronski, travaux trop longtemps méconnus.

La forme sous laquelle se présente l'équation (16) indique que, si l'on connaissait une valeur approchée de la fonction z, le troisième terme pourrait être considéré comme une fonction de x, et l'équation formée ainsi serait une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants; intégrée, elle donnerait une valeur très approchée de la fonction inconnue. Prenant donc pour *équation réduite* une équation différentielle formée de cette manière, la méthode de Wronski ferait

---

[1] L'équation (11) est celle qui résulte de l'élimination des relations (1) et (5) ou (7) et (9).

connaître la fonction cherchée avec une approximation bien supérieure à celle que l'on désire.

Cette formation de l'équation réduite est possible de bien des manières; mais, pour que les calculs soient praticables, il faut que les intégrales définies que l'on rencontre puissent s'obtenir par des calculs directs ou par quadratures. Nous avons procédé ainsi et nous sommes parvenu à calculer directement l'ordonnée du profil correspondant à $x = 24$. Quoi que l'on fasse, ces calculs sont longs; il est préférable d'opérer comme l'indique Wronski et d'obtenir l'équation réduite de la manière suivante.

Si, dans le troisième terme de l'équation (16), nous remplaçons z et z' par leurs valeurs moyennes que nous prendrons ici égales aux valeurs initiales 71,119 et 14,224, nous aurons pour ce terme une quantité de la forme

$$Ax + B(x-a)^3;$$

il sera facile alors de calculer l'intégrale définie

$$\int_0^x [Ax + B(x-a)^3]\, e^{-hx}\, dx.$$

Mais l'expression de cette intégrale présente une partie des inconvénients que nous venons de signaler; on peut les éviter par l'introduction de la fonction arbitraire se^{rx}. Si l'on se rend compte de la variation du troisième terme de (16) pour des valeurs croissantes de x, ce qu'il est facile de faire *a priori*, on verra que cette fonction est ici très avantageuse.

Nous pourrons donc écrire l'équation transformée sous la forme

$$(17) \qquad z' - hz - \left[\frac{\frac{1}{2}\displaystyle\int_0^x z'^2\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{zse^{rx}}\right]^{\omega} se^{rx} = 0;$$

pour $\omega = 1$ on a l'équation proposée (16), et pour $\omega = 0$ on a l'équation réduite

$$(18) \qquad w' - hw - se^{rx} = 0,$$

en mettant w à la place de z.

Les valeurs fondamentales de la fonction cherchée, c'est-à-dire la fonction w et ses dérivées, sont

$$(19)\qquad \begin{cases} w = \mathrm{M}\;\; e^{hx} + \mathrm{N}\;\; e^{rx}, \\ w' = \mathrm{M}h\; e^{hx} + \mathrm{N}r\; e^{rx}, \\ w'' = \mathrm{M}h^2 e^{hx} + \mathrm{N}r^2 e^{rx}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

M, N et r étant des constantes arbitraires qu'il faut déterminer d'après les valeurs initiales de l'équation (16); ces dernières sont aussi les valeurs moyennes. Nous avons, pour valeurs initiales,

$$(20)\qquad \begin{cases} x = 14,224, \quad z = 71,119, \quad z' = 5, \\ \int_0^x z'^2\, dx = b^2 x = 142,238, \end{cases}$$

et l'équation (16) donne par dérivation

$$(20)' \qquad z'' = 0,34554;$$

c'est la tangente au point de départ du nouveau profil.

Il faut remarquer que l'équation (16), pour $x = 14,224$, est identique à l'équation (13).

Les constantes sont ainsi données par la résolution des équations

$$\begin{aligned} 71,119 &= \mathrm{M}\;\; e^{h\,14,224} + \;\mathrm{N}e^{r\,14,224}, \\ 5 &= \mathrm{M}h\;\, e^{h\,14,224} + r\,\mathrm{N}e^{r\,14,224}, \\ 0,3455 &= \mathrm{M}h^2 e^{h\,14,224} + r^2\,\mathrm{N}e^{r\,14,224}; \end{aligned}$$

on en déduit

$$(21)\qquad \begin{cases} r = \dfrac{5h - 0,3455}{71,119h - 5} = 0,0685548, \\ \mathrm{M} = \dfrac{r.71,119 - 5}{r - h}\, e^{-h\,14,224} = -1,9581, \\ \mathrm{N} = \dfrac{0,3455 - h.5}{r(r-h)}\, e^{-r\,14,224} = +27,8358. \end{cases}$$

On a ainsi, pour l'intégrale définie qu'il faut calculer,

$$\int_0^x w'^2\,dx = \int_0^x (M^2 h^2 e^{2hx} + 2MN hr e^{(h+r)x} + N^2 r^2 e^{2rx})\,dx,$$

et, déterminant la constante comme plus haut,

$$(22)\qquad \int_0^x w'^2\,dx = \frac{1}{2} M^2 h e^{2hx} + \frac{2MNhr}{h+r} e^{(h+r)x} + \frac{1}{2} N^2 r e^{2rx} + 175,710.$$

Il est maintenant facile d'obtenir l'expression des fonctions inconnues. En effet, le deuxième progrès de la génération neutre donne, pour l'expression fondamentale,

$$(23)\qquad F(z) = F(w) - \frac{(F'(w))}{\dfrac{(\varphi'(w))}{\varphi(w)} + \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{(F''(w))}{(F'(w))} - \dfrac{(\varphi''(w))}{(\varphi'(w))}\right\}}.$$

$F(z)$ est une fonction quelconque de z ; quant aux fonctions φ, elles sont

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned}
\varphi(z) &= z' - hz - \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x z'^2\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{z},\\
(\varphi'(z)) &= z'' - hz' + \frac{z'}{z}\left[\frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x z'^2\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{z} - \frac{1}{2}z'\right],\\
(\varphi''(z)) &= z''' - hz'' - \frac{z'}{z}\left[z'' - \frac{z'^2}{z} + \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x z'^2\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{z}.\left(2\frac{z'}{z} - \frac{z''}{z'}\right)\right];
\end{aligned}\right.$$

à la place de z, substituant w calculé au moyen de (19), ainsi que ses dérivées, on obtiendra la fonction $F(z)$. Mais, si l'on observe que les dérivées w'', w''' calculées par (19) peuvent différer notablement des valeurs véritables z'', z''', celles de w, w' étant au contraire suffisamment approchées, il sera avantageux d'opérer de la manière suivante, que nous avons déjà indiquée.

En prenant les dérivées totales, on a les relations,

$$(25)\quad \begin{cases} \varphi(z) = 0, \\ \varphi'(z) = (\varphi'(z)) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\theta(x-a)^2}{z} = 0, \\ \varphi''(z) = (\varphi''(z)) - \dfrac{\theta(x-a)}{z}\left[1 - \dfrac{w'(x-\alpha)}{w}\right] = 0; \end{cases}$$

on peut donc substituer aux dérivées partielles $(\varphi'(z))$, $(\varphi''(z))$ le complément des dérivées totales, pourvu toutefois que w et w' soient assez rapprochés de z et z'; les autres dérivées w'', w''' seront alors calculées au moyen des dérivées totales de l'équation proposée.

En opérant ainsi, on a, pour $x = 17$,

$$(26)\quad \begin{cases} w = 86,421, \quad w' = 6,057, \quad w'^2 = 36,686, \\ w'' = 0,4675, \quad w''' = 0,1452, \quad \displaystyle\int_0^x w'^2\,dx = 441,932, \end{cases}$$

et l'équation réduite donnerait

$$w'' = 0,41817, \quad w''' = 0,02887.$$

On a encore

$$(27)\quad \begin{cases} \varphi(w) = -0,086, \quad (\varphi'(w)) = +0,4166, \quad (\varphi''(w)) = +0,1132, \\ \dfrac{(\varphi'(w))}{\varphi(w)} = -4,844, \quad \dfrac{\varphi''(w))}{(\varphi'(w))} = +0,308. \end{cases}$$

L'expression qui donne z est, d'après (23), en faisant $F(z) = z$

$$(28)\qquad z = w - \frac{w'}{\dfrac{(\varphi'(w))}{\varphi(w)} + \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{w''}{w'} - \dfrac{(\varphi''(w))}{(\varphi'(w))}\right\}};$$

les autres dérivées s'obtiendraient en faisant successivement $F(z) = z'$, z'', ... Si l'on fait $F(z) = \int z'^2\,dx$, on a

$$(28)'\qquad \int_0^x z'^2\,dx = \int_0^x w'^2\,dx - \frac{w'^2}{\dfrac{(\varphi'(w))}{\varphi(w)} + \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{2w''}{w'} - \dfrac{(\varphi''(w))}{(\varphi'(w))}\right\}}.$$

Substituant les nombres aux quantités qui entrent dans ces formules,

on obtient définitivement, pour $x = 17$,

$$(29)\quad \begin{cases} z = 86,421 + 1,221 = 87,642, \\ z' = 6,057 + 0,096 = 6,153, \\ z'' = 0,4682, \\ \int_0^x z'^2\,dx = 441,93 + 7,45 = 449,38. \end{cases}$$

La dérivée z'' a été calculée au moyen de la dérivée totale de l'équation proposée et des quantités z et z'; calculée comme z', elle serait $z'' = 0,4975$, et au moyen des valeurs tirées de l'équation réduite, elle serait $z'' = 0,4212$, ce qui fait voir que le deuxième progrès (23) est insuffisant, ou que la convergence de l'expression fondamentale pour z'' est moins grande que pour z et z'.

Comme vérification, on a

$$\varphi(z) = +0,003;$$

les valeurs (29) sont donc suffisamment exactes, mais, pour des valeurs de x supérieures à 17, il ne serait pas prudent d'effectuer les calculs avec les constantes données par (21) et (22) : il faut prendre les quantités (29) comme valeurs initiales et calculer de nouvelles constantes par le même procédé que plus haut.

Il est nécessaire de vérifier si l'équation proposée (16), provenant de l'élimination de u_1 entre les relations (15) ou (7) et (10), convient encore; pour cela, la première équation (15) donne

$$(30)\qquad u_1 = 1,931,$$

quantité plus petite que $\frac{1}{3}z' = 2,045$, ce qui correspond à la supposition faite. Il convient aussi de calculer u_2 et la valeur correspondante de λ; la relation (8) donne

$$(30)'\qquad u_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\int_0^x z'^2\,dx}{z} = 2,547,$$

et l'on tire de (11)

$$(30)''\qquad \lambda = \left(\frac{2}{3}z' - u_2\right)\frac{6z}{z'^2} = 21,37.$$

On voit qu'il faut poursuivre le calcul : on prendra donc les valeurs (29) correspondant à $x = 17$ comme valeurs initiales et, changeant les constantes arbitraires au moyen des formules données plus haut, on calculera les valeurs des inconnues correspondant à $x = 20$; changeant encore une fois de constantes en prenant pour valeurs initiales les dernières valeurs calculées, on obtient les valeurs suivantes correspondant à $x = 24$:

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} z &= 141,93,\\ z' &= 10,356,\\ z'' &= 0,7183,\\ \int_0^x z'^2\,dx &= 901,20. \end{aligned}\right.$$

On a aussi

$$(31)'\qquad u_1 = 3,154,\quad u_2 = 3,174,$$

et la valeur de λ correspondant à u_2 est

$$(31)''\qquad \lambda = 29,807.$$

Ce nombre est assez rapproché de la limite $\lambda = 30$; le problème qui se présente maintenant consiste à déterminer la valeur de x correspondant à cette limite.

u_2 étant plus petit que $\frac{z'}{3}$, il faudra satisfaire en même temps aux relations (8) et (12) au moyen des fonctions z_1, z'_1, les fonctions z_2, z'_2 étant toujours nulles; en éliminant u_2 entre les relations (8) et (12), supprimant l'indice de z et faisant $\frac{2}{3\lambda} = \frac{2}{90}$, on a

$$(32)\qquad hz - \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x z'^2}{z} = 0,$$

équation transcendante en x, qu'il faut résoudre par rapport à cette quantité, puisque z est une fonction de x.

Faisons usage de l'expression fondamentale (23); elle se réduit à

$$(33)\qquad x = w - \frac{1}{\frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)} - \frac{1}{2}\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}},$$

en posant $F(z) = x$, et nous aurons, d'après (32), après avoir chassé le dénominateur,

$$(34)\qquad \begin{cases} \varphi(x) = \int_0^x z'^2\,dx - 2hz^2, \\ \varphi'(x) = z'^2 - 4hzz', \\ \varphi''(x) = 2z'z'' - 4hzz'' - 4hz'^2. \end{cases}$$

Prenons aussi, pour valeur fondamentale de x, $w = 24$; il vient

$$(35)\qquad \begin{cases} \varphi(w) = +5,78, \quad \varphi'(w) = -23,57, \quad \varphi''(w) = -13,71; \\ \frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)} = -4,079, \quad \frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = +0,583. \end{cases}$$

Nous aurons donc, d'après (33), pour la solution de l'équation transcendante (32),

$$(36)\qquad x = 24,229.$$

Il reste à calculer de nouveau la quantité z et les fonctions de z correspondant à $x = 24,229$; on trouverait facilement

$$(36)'\qquad z = 144,31, \quad z' = 10,520, \quad \int z'^2\,dx = 925,76.$$

Comme vérification, (7) et (10) donnent

$$u_1 = 3,2066, \quad \lambda = 30,002;$$

puis (8) et (12),

$$u_2 = 3,2075, \quad \lambda = 29,995.$$

Les résultats obtenus présentent une exactitude suffisante pour passer à la détermination des profils de la troisième partie du mur.

Troisième partie. — D'après les conditions que nous nous sommes imposées, il existe deux profils courbes dans la partie inférieure du mur; le profil d'aval sera toujours déterminé par le système des rela-

tions (7) et (10), et le profil d'amont sera déterminé par le système (8) et (12).

Éliminant u_1 et u_2 dans chaque système, on obtient

$$(37)\quad \left\{\begin{array}{l} z'_1 - hz_1 + h\left[z_2 + \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx\right] \\ \quad -\frac{1}{2}\dfrac{\int_0^x z'^2_1\,dx - \int_0^x z'^2_2\,dx - 2\theta\int_0^x (x-a)z'_2 z''_2\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx} = 0, \\ z'_2 - hz_2 + hz_1 - \frac{1}{2}\dfrac{\int_0^x z'^2_1\,dx - \int_0^x z'^2_2\,dx}{z_1 - z_2} = 0, \end{array}\right.$$

équations différentielles simultanées qu'il s'agit d'intégrer; nous les représenterons respectivement par

$$\varphi_1(z_1, z_2) = 0, \quad \varphi_2(z_1, z_2) = 0,$$

ou, plus simplement, par

$$\varphi_1(z_1) = 0, \quad \varphi_2(z_2) = 0,$$

puisque z_2 est considéré comme fonction de z_1 dans φ_1, et z_1 comme fonction de z_2 dans φ_2.

Pour effectuer ce calcul, nous adopterons une marche en tout semblable à celle que nous avons suivie dans l'intégration précédente : nous mettrons les équations réduites sous la forme (18); les valeurs fondamentales seront alors de la forme (19); et celles-ci entreront dans l'expression fondamentale (23), qui donne les fonctions cherchées.

Mais, en examinant la composition des coefficients de la seconde équation (37), on voit qu'ils ne contiennent que des fonctions de z_1 et de z_2, ce qui fait que les dérivées partielles, par rapport à z_1 et z_2, du premier membre de cette équation, seront identiques aux dérivées totales de même ordre, et ces dérivées sont nulles. Il en résulterait une indétermination qui rendrait illusoire l'expression fondamentale (23), si l'on n'opérait de la manière suivante : d'après l'origine des équations (37), il est indiqué que la première doit déterminer la fonction z_1, et la seconde la fonction z_2; or la première équation, ne présentant au-

cune particularité, permettra de calculer directement la fonction z_1; cette fonction, une fois connue, pourra être considérée dans la seconde équation comme une simple fonction de x; de cette manière on aura

$$
(38)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varphi_1(z_1) = z'_1 - h\left[z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx\right] \\
&\qquad - \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x z'^2_1\,dx - \int_0^x z'^2_2\,dx - 2\theta\int_0^x (x-a)z'_2 z''_2\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx}, \\
&(\varphi'_1(z_1)) = z''_1 - h[z'_1 - z'_2 - \theta(x-a)z''_2] \\
&\qquad - \frac{1}{2}\,\frac{z'^2_1 - z'^2_2 - 2\theta(x-a)z'_2 z''_2}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx} + \frac{z'_1 - z'_2 - \theta(x-a)z''_2}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx} \\
&\qquad \times \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x z'^2_1\,dx - \int_0^x z'^2_2\,dx - 2\theta\int_0^x (x-a)z'_2 z''_2\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx}, \\
&(\varphi''_1(z_1)) = z'''_1 - h[z''_1 - z''_2 - \theta(x-a)z'''_2] \\
&\qquad - \frac{z'_1 z''_1 - z'_2 z''_2 - \theta(x-a)(z''^2_2 + z'_2 z'''_2)}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx} + \frac{z'_1 - z'_2 - \theta(x-a)z''_2}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx} \\
&\qquad \times \frac{z'^2_1 - z'^2_2 - 2\theta(x-a)z'_2 z''_2}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx} + \frac{z''_1 - z''_2 - \theta(x-a)z'''_2}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx} \\
&\qquad \times \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x z'^2_1\,dx - \int_0^x z'^2_2\,dx - 2\theta\int_0^x (x-a)z'_2 z''_2\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx} \\
&\qquad - 2\left[\frac{z'_1 - z'_2 - \theta(x-a)z''_2}{\displaystyle z_1 - z_2 - \int_0^x (x-a)z''_2\,dx}\right]^2 \\
&\qquad \times \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x z'^2_1\,dx - \int_0^x z'^2_2\,dx - 2\theta\int_0^x (x-a)z'_2 z''_2\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx};
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(39)\begin{cases}
\varphi_2(z_2) = z'_2 + h(z_1 - z_2) - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\displaystyle\int_0^x z_1'^2\,dx - \int_0^x z_2'^2\,dx}{z_1 - z_2}, \\[2ex]
(\varphi'_2(z_2)) = z''_2 - hz'_2 + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{z_2'^2}{z_1 - z_2} - \dfrac{z'_2}{z_1 - z_2}\,\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\displaystyle\int_0^x z_1'^2\,dx - \int_0^x z_2'^2\,dx}{z_1 - z_2}, \\[2ex]
(\varphi''_2(z_2)) = z'''_2 - hz''_2 + \dfrac{z'_2 - z''_2}{z_1 - z_2} + \dfrac{z'_2}{2}\,\dfrac{2z_2'^2 - z'_1 z'_2 - z_1'^2}{(z_1 - z_2)^2} - \dfrac{z''_2}{z_1 - z_2} \\[2ex]
\qquad \times \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\displaystyle\int_0^x z_1'^2\,dx - \int_0^x z_2'^2\,dx}{z_1 - z_2} + 2\,\dfrac{z'_2(z'_1 - z'_2)}{(z_1 - z_2)^2}\,\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\displaystyle\int_0^x z_1'^2\,dx - \int_0^x z_2'^2\,dx}{z_1 - z_2};
\end{cases}
$$

et les dérivées totales seront

$$
(40)\begin{cases}
\varphi'_1(z_1) = (\varphi'_1(z_1)) - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\theta(x-a)^2}{z_1 - z_2 - \theta\displaystyle\int_0^x (x-a)z''_2\,dx} = 0, \\[2ex]
\varphi''_1(z_1) = (\varphi''_1(z_1)) + h\theta z''_2 \\[1ex]
\qquad + \dfrac{\theta(a - x + z'_2 z''_2)}{z_1 - z_2 - \theta\displaystyle\int_0^x (x-a)z''_2\,dx} + \dfrac{1}{2}\theta(x-a)^2\,\dfrac{z'_1 - z'_2 - \theta(x-a)z''_2}{\left[z_1 - z_2 - \theta\displaystyle\int_0^x (x-a)z''_2\,dx\right]^2} \\[2ex]
\qquad - \dfrac{1}{2}\theta z''_2\,\dfrac{\displaystyle\int_0^x z_1'^2\,dx - \int_0^x z_2'^2\,dx - 2\theta\int_0^x (x-a)z'_2 z''_2\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{\left[z_1 - z_2 - \theta\displaystyle\int_0^x (x-a)z''_2\,dx\right]^2} = 0,
\end{cases}
$$

$$
(41)\begin{cases}
\varphi'_2(z_2) = (\varphi'_2(z_2)) + hz'_1 - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{z_1'^2}{z_1 - z_2} + \dfrac{z'_1}{z_1 - z_2}\,\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\displaystyle\int_0^x z_1'^2\,dx - \int_0^x z_2'^2\,dx}{z_1 - z_2} = 0, \\[2ex]
\varphi''_2(z_2) = (\varphi''_2(z_2)) + hz''_1 - \dfrac{z'_1 z''_1}{z_1 - z_2} \\[1ex]
\qquad + \dfrac{z'_1}{2}\,\dfrac{2z_1'^2 - z'_1 z'_2 - z_2'^2}{(z_1 - z_2)^2} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{z''_1}{z_1 - z_2}\,\dfrac{\displaystyle\int_0^x z_1'^2\,dx - \int_0^x z_2'^2\,dx}{z_1 - z_2} \\[2ex]
\qquad - 2z'_1\,\dfrac{z'_1 - z'_2}{(z_1 - z_2)^2}\,\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\displaystyle\int_0^x z_1'^2\,dx - \int_0^x z_2'^2\,dx}{z_1 - z_2} = 0.
\end{cases}
$$

Ces relations nous permettent de déterminer les valeurs initiales.

La seconde équation (37) est identiquement satisfaite pour $x = 24,229$, puisque les quantités z_2, z'_2 et $\int_0^x z'^2_2\,dx$ sont nulles, et la dérivée totale, première équation (41), donne z''_2. La première équation (37) est ainsi satisfaite pour les valeurs précédentes, en faisant de plus

$$\int_0^x (x-a)z''_2\,dx = 0, \qquad \int_0^x (x-a)z'_2 z''_2\,dx = 0,$$

ce qui est conforme aux conditions du problème. La dérivée totale, première relation (40), donnera z''_1, valeur qui diffère de la quantité $z'' = 0,7246$ du profil précédent à cause des nouvelles quantités qui entrent dans l'expression de z''_2.

On a ainsi, à l'origine, pour $x = 24,229$,

$$(42)\quad \left\{\begin{array}{llll} z_1 = 144,31, & z'_1 = 10,520, & z''_1 = 0,7476, & \int_0^x z'^2_1\,dx = 925,76, \\ z_2 = 0, & z'_2 = 0, & z''_2 = -0,0841, & \int_0^x z'^2_2\,dx = 0, \\ \int_0^x (x-a)z''_2\,dx = 0, & \int_0^x (x-a)z'_1 z''_2\,dx = 0. & & \end{array}\right.$$

Maintenant, si l'on veut prendre pour valeurs fondamentales des quantités de la forme (19), on observera, d'après (21), que l'on aurait une quantité infinie pour r_2 correspondant à z_2; les expressions (19) ne peuvent donc convenir. Le moyen le plus simple de lever cette difficulté est de mettre ici l'équation réduite sous la forme

$$(43)\qquad w' - hw - px - q = 0,$$

qui est suffisante; nous l'adopterons pour les deux profils [1].

---

[1] On aurait pu aussi, dans (18), substituer avec avantage à la fonction se^{rx} la fonction plus simple $px + q$.

Nous aurons donc ainsi

$$(44)\quad \begin{cases} w_1 = M_1 e^{hx} + P_1 x + Q_1, \\ w'_1 = M_1 h e^{hx} + P_1, \\ w''_1 = M_1 h^2 e^{hx}; \end{cases}$$

$$(44)'\quad \begin{cases} w_2 = M_2 e^{hx} + P_2 x + Q_2, \\ w'_2 = M_2 h e^{hx} + P_2, \\ w''_2 = M_2 h^2 e^{hx}; \end{cases}$$

et les constantes seront

$$(45)\quad \begin{cases} M_1 = \frac{0,7476}{h^2} e^{-h.24,229} = +883,612, \\ P_1 = 10,520 - M_1 h e^{h.24,229} = -23,122, \\ Q_1 = 144,31 - M_1 h^2 e^{h.24,229} - P.24,229 = -809,36; \end{cases}$$

$$(45)'\quad \begin{cases} M_2 = -\frac{0,0841}{h^2} e^{-h.24,229} = -99,471, \\ P_2 = -M_2 h e^{h.24,229} = +3,787, \\ Q_2 = -M_2 h^2 e^{h.24,229} - P.24,229 = +78,664. \end{cases}$$

On a ensuite, pour les intégrales définies,

$$(46)\quad \int_0^x w_1'^2\,dx = \tfrac{1}{2} M_1^2 h e^{2hx} + 2 M_1 P_1 e^{hx} + P_1^2 x + 32515,26;$$

$$(46)'\quad \begin{cases} \int_0^x w_2'^2\,dx = \tfrac{1}{2} M_2^2 h e^{2hx} + 2 M_2 P_2 e^{hx} + P_2^2 x + 620,63, \\ \int_0^x (x-a) w''_2\,dx = M_2 h\left(x - a - \frac{1}{h}\right) e^{hx} - 97,600, \\ \int_0^x (x-a) w'_1 w''_2\,dx = \frac{1}{2} M_2^2 h^2 \left(x - a - \frac{1}{2h}\right) e^{2hx} \\ \qquad + M_2 P_2 h \left(x - a - \frac{1}{h}\right) e^{hx} - 16648,31. \end{cases}$$

Nous pouvons à présent calculer les ordonnées du double profil, pour une valeur donnée de x, par exemple pour $x = 30$.

On a successivement, dans l'ordre des calculs,

(47)
$$w_1 = +218,02, \quad \text{d'après l'express. (44)},$$
$$w'_1 = +15,123, \quad \text{» (44)},$$
$$\int_0^x w'^2_1\,dx = +1877,13, \quad \text{» (46)},$$
$$w_2 = -1,464, \quad \text{» (44)'},$$
$$w'_2 = -0,5182, \quad \text{» (44)'},$$
$$\int_0^x w'^2_2\,dx = +0,50, \quad \text{» (46)'},$$
$$\int_0^x (x-a)w''_2\,dx = -11,492, \quad \text{» (46)'},$$
$$\int_0^x (x-a)w'_2 w''_2\,dx = +3,105, \quad \text{» (46)'},$$
$$w''_2 = -0,1422, \quad \text{d'après la 2}^{\text{e}}\text{ express. (39) et 1}^{\text{re}}\text{ (41)},$$
$$\varphi''_2(w_1) = +0,178, \quad \text{» 1}^{\text{re}}\text{ » (38)}$$
$$(\varphi'_1(w_1)) = +0,6937, \quad \text{» 1}^{\text{re}}\text{ » (40) derniers termes},$$
$$w''_1 = +0,8103, \quad \text{» 2}^{\text{e}}\text{ » (38) et 1}^{\text{re}}\text{ (40)},$$
$$w'''_2 = -0,0135, \quad \text{» 3}^{\text{e}}\text{ » (39) et 2}^{\text{e}}\text{ (41)},$$
$$(\varphi''_1(w_1)) = +0,0010, \quad \text{» 2}^{\text{e}}\text{ » (40) derniers termes},$$
$$w'''_1 = +0,0545, \quad \text{» 3}^{\text{e}}\text{ » (38) et 2}^{\text{e}}\text{ (40)};$$

l'équation réduite eût donné

$$w''_1 = 0,849, \quad w'''_1 = 0,0188,$$
$$w''_2 = -0,095, \quad w'''_2 = -0,0021.$$

On en déduit

(47)'
$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{(\varphi'_1(w_1))}{\varphi_1(w_1)} = +3,8972, & \dfrac{(\varphi''_1(w_1))}{(\varphi'_1(w_1))} = +0,0014, \\ \dfrac{w''_1}{w'_1} = +0,5358, & \dfrac{w'''_1}{w''_1} = +0,0672; \end{array}\right.$$

par suite, l'expression fondamentale (23), savoir

$$F(z) = F(w) - \frac{(F'(w))}{\frac{(\varphi'(w))}{\varphi(w)} + \frac{1}{2}\left\{\frac{(F''(w))}{(F'(w))} - \frac{(\varphi''_1(w))}{(\varphi'(w))}\right\}},$$

donnera, en mettant φ_1 pour φ et successivement z_1, ainsi que ses dérivées, puis l'intégrale définie désignée plus haut, pour $F(z)$,

$$(48)\quad \begin{cases} z_1 = 218,020 - 3,632 = 214,388, \\ z'_1 = 15,123 - 0,206 = 14,917, \\ z''_1 = 0,8103 - 0,0140 = 0,7963, \\ \int_0^x z_1'^2\,dx = 1877,13 - 50,02 = 1827,11; \end{cases}$$

les seconds termes de ces quantités proviennent respectivement des divisions suivantes :

$$\frac{15,123}{4,164},\quad \frac{0,8103}{3,930},\quad \frac{0,0545}{3,897},\quad \frac{222,52}{4,432}.$$

Avec ces valeurs de z_1, z'_1, ..., on calcule les quantités

$$(49)\quad \begin{cases} \varphi_2(w_2) = +0,0474, & \text{d'après la 1}^{\text{re}}\text{ express. (39),} \\ (\varphi'_2(w_2)) = -0,1084, & \text{» 1}^{\text{re}}\text{ » (41) derniers termes,} \\ w''_2 = -0,1364, & \text{» 2}^{\text{e}}\text{ » (39) et 1}^{\text{re}}\text{ (41),} \\ (\varphi''_2(w_2)) = -0,0061, & \text{» 2}^{\text{e}}\text{ » (41) derniers termes,} \\ w'''_2 = -0,0161, & \text{» 3}^{\text{e}}\text{ » (39) et 2}^{\text{e}}\text{ (41).} \end{cases}$$

On en déduit, avec les quantités w_2, w'_2 de (47),

$$(49)'\quad \begin{cases} \frac{(\varphi'_2(w_2))}{\varphi_2(w_2)} = -2,2870, & \frac{(\varphi''_2(w_2))}{(\varphi'_2(w_2))} = +0,0562, \\ \frac{w''_2}{w'_1} = +0,2631, & \frac{w'''_2}{w''_2} = +0,1180, \end{cases}$$

et l'expression fondamentale (23) donne

$$(50)\quad \begin{cases} z_2 = -1,464 \ -0,238 \ = -1,702, \\ z'_2 = -0,5182 - 0,0604 = -0,5786, \\ z''_2 = -0,1364 - 0,0070 = -0,1434, \\ \int_0^x z'^2_2\, dx = +0,50 \ +0,13 \ = +0,63; \end{cases}$$

les seconds termes de ces quantités proviennent respectivement des divisions

$$\frac{0,5182}{2,1736},\quad \frac{0,1364}{2,2561},\quad \frac{0,0161}{2,287},\quad \frac{0,268}{2,052}.$$

Pour le calcul des deux dernières intégrales définies de (47), on a respectivement

$$\frac{(\mathrm{F}''(w_2))}{(\mathrm{F}'(w_2))} = \frac{(x-a)w'''_2}{(x-a)w''_2} = 0,118,$$

$$\frac{(\mathrm{F}''(w_2))}{(\mathrm{F}'(w_2))} = \frac{(x-a)(w'_2 w'''_2 + w''^2_2)}{(x-a)w'_2 w''_2} = 0,381,$$

et ensuite

$$(50)'\quad \begin{cases} \int_0^x (x-a)z''_2\, dx = -11,492 - 1,512 = -13,004, \\ \int_0^x (x-a)z'_2 z''_2\, dx = +\ 3,105 + 0,832 = +\ 3,937; \end{cases}$$

les seconds termes proviennent des divisions

$$\frac{2,410}{2,256},\quad \frac{1,767}{2,124}.$$

Nous pouvons vérifier maintenant, au moyen des quantités obtenues (48), (50), (50)', si les équations proposées sont satisfaites; nous avons ainsi

$$\varphi_1(z_1) = +0,0268,$$

$$\varphi_1(z_2) = -0,0008.$$

Ce résultat montre qu'avec les formules dont nous avons fait usage et pour l'approximation qui convient il n'est pas avantageux de calculer les ordonnées des profils, au delà de $x = 30$, sans changer de

valeurs initiales. Cependant, au moyen de la méthode d'exhaustion, il est possible d'avoir une approximation plus grande que celle que nous obtenons, et même, avec la convergence donnée par l'expression fondamentale (23), on peut arriver rapidement au même résultat par un simple procédé de répétition.

En effet, substituant les valeurs obtenues dans le second terme de la première expression (40), on a

$$(\varphi_1'(z_1)) = +0,7019,$$

d'où

$$\frac{\varphi_1(z_1)}{(\varphi_1'(z_1))} = +0,0382,$$

et l'expression fondamentale réduite à ses deux premiers termes,

$$F(z) = F(w) - \frac{\varphi(z)}{(\varphi'(z))}(F'(w)),$$

donne, en prenant les quantités (48) pour valeurs fondamentales,

$$(51) \left\{ \begin{aligned} z_1 &= 214,388 - 0,0382 . 14,917 = 213,818, \\ z_1' &= 14,9168 - 0,0382 . 0,7963 = 14,8864, \\ z_1'' &= 0,7963 - 0,0382 . 0,0545 = 0,7942, \\ \int_0^x z_1'^2\,dx &= 1827,11 - 0,0382 . 222,52 = 1818,61. \end{aligned} \right.$$

Avec ces nouvelles valeurs (51) et les précédentes (50) et (50)', les équations proposées donnent comme vérification

$$\varphi_1(z_1) = 14,8864 - 4,9338 - 9,9499 = +0,0027,$$
$$\varphi_2(z_2) = -0,5786 + 4,7893 - 4,2176 = -0,0069;$$

de là on déduit

$$(52) \left\{ \begin{aligned} u_1 &= 14,8864 - 9,9499 = 4,9365, && \text{d'après l'express. (7)} \\ \lambda_1 &= \frac{2}{3}\,\frac{222,022}{u_1} = 29,984, && \text{» (10)} \end{aligned} \right.$$

$$(53) \left\{ \begin{aligned} u_2 &= +0,5786 + 4,2176 = 4,7962, && \text{» (8)} \\ \lambda_2 &= \frac{2}{3}\,\frac{215,52}{u_2} = 29,954 && \text{» (12)} \end{aligned} \right.$$

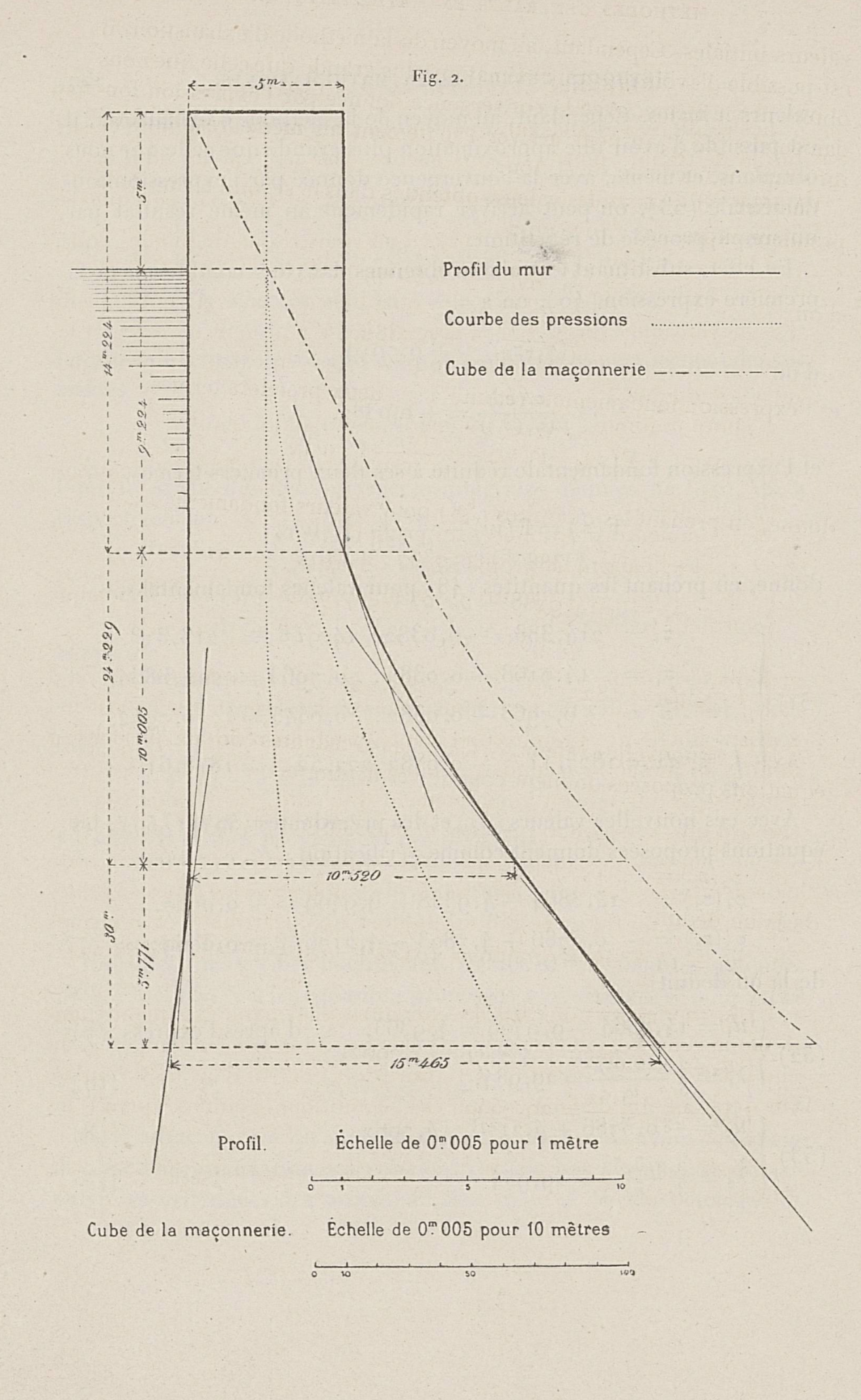


Fig. 2.
5m
5m
14m224
9m224
24m229
10m005
30m
5m771
10m520
15m465
Profil du mur
Courbe des pressions
Cube de la maçonnerie
Profil.
Échelle de 0m005 pour 1 mètre
0
1
5
10
Cube de la maçonnerie.
Échelle de 0m005 pour 10 mètres
0
10
50
100

Les résultats auxquels nous parvenons présentent donc toute l'exactitude désirable; nous vérifions encore, par les valeurs de u_1 et u_2 comparées au tiers de l'épaisseur du mur $\frac{1}{3}(z'_1 + z'_2) = 5,155$, que les expressions (7), (8), (10) et (12), d'où nous avons déduit les équations du problème (37), sont bien celles qu'il convenait de choisir.

Nous avons ainsi les principales quantités qui déterminent le profil d'égale résistance jusqu'à 30^m; il serait facile à présent de calculer les valeurs intermédiaires et même de poursuivre le calcul du profil jusqu'à 40^m ou 50^m.

L'épure ci-jointe (*fig.* 2) résume les résultats obtenus :

la quantité $z_1 + z_2$ donne le cube de maçonnerie par mètre courant de l'ouvrage,
z'_1 et z'_2 donnent les ordonnées du profil du mur,
z''_1 et z''_2 l'inclinaison des profils sur la verticale,
u_1 et u_2 les points de rencontre des résultantes des pressions sur chaque joint fictif horizontal.

Nous terminons ce dernier exemple, qui offrait quelque intérêt à cause des difficultés mêmes. Nous avons refait les calculs à plusieurs reprises afin de nous rendre un compte exact des résultats que pouvait donner la méthode secondaire; nous avons même effectué les intégrations par un moyen complètement différent [1], et nous sommes aujourd'hui convaincu que les méthodes de Wronski, quand elles seront connues, devront se substituer rapidement aux procédés ordinaires, presque toujours insuffisants et compliqués; les transcendantes élémentaires pratiques se réduiront alors aux logarithmes et aux sinus de tous les ordres, ces fonctions comprenant les exponentielles et les sinus du cercle.

La méthode que nous faisons connaître peut avoir dès maintenant de nombreuses applications, mais la réussite dépendra surtout d'un choix judicieux des quantités arbitraires qui entrent dans les formules. On sera assuré d'avoir rempli les conditions voulues quand les

---

(1) Nous voulons parler de la Méthode secondaire systématique que nous avons rétablie avant celle-ci.

inconnues et les fonctions de ces inconnues engagées dans les équations seront toutes données par des développements d'une convergence à peu près égale.

On ne peut reprocher aux calculs qui précèdent d'être longs à exécuter : les avantages qu'ils présentent les rend bien supérieurs par la précision aux tracés d'épures et à tous les autres moyens employés, ils n'ont pas d'équivalents; les deux ou trois jours de calcul qu'ils peuvent au plus réclamer sont peu de chose comparés aux trois ou quatre campagnes que nécessite la construction des grands murs de réservoirs; d'ailleurs, quelles précautions ne doit-on pas prendre pour assurer la réussite de pareils ouvrages? Les calculs ne sont pas aussi pénibles qu'ils semblent être au premier abord : il suffit d'examiner la disposition des formules (38), (39), (40) et (41) pour s'en convaincre et, en faisant usage de procédés expéditifs, le travail se trouve très sensiblement réduit; c'est ainsi que nous avons obtenu très simplement les dérivées secondes de φ_1 et de φ_2 au moyen de la règle à calcul.

Dans la pratique, les profils ne se déterminent pas comme nous l'avons admis; pour des raisons relatives à l'exécution des travaux, les murs présentent un fruit dès la partie supérieure et les raccords des diverses courbes ont lieu insensiblement; il suffit donc de vérifier si le profil que l'on adopte ne s'écarte pas trop des conditions d'égale résistance, en considérant les sections de rupture probable et non des joints fictifs horizontaux qui n'ont aucune raison d'être *a priori* d'après le mode de construction usité en pareils cas. Enfin si l'on admet, comme on doit le faire pour les matériaux avec lesquels sont construits ces ouvrages, une résistance supérieure à celle de 6^{kg} que nous avons supposée, les calculs se trouveront notablement simplifiés pour une même hauteur, et on réalisera de plus une économie sur la construction; en effet, jusqu'à une hauteur de 40^{m} environ, et même au delà, et pour une résistance de 8^{kg} à 9^{kg} par centimètre carré, la partie courbe d'amont n'aura pas de raison d'être et les calculs ne se rapporteront qu'à l'intégration d'une seule équation différentielle, comme l'équation (16).

Mais ces considérations sont étrangères à notre sujet : notre but était d'indiquer seulement la marche des calculs dans une application importante de la nouvelle méthode.

RÉSUMÉ DE LA MÉTHODE.

Avant d'abandonner le sujet qui nous occupe, il ne sera peut-être pas inutile de donner l'expression calculée du troisième progrès de la génération neutre. D'après les notations adoptées, nous avons, en mettant pour simplifier φ à la place de $\varphi(w)$,

$$(107) \quad y = w - \frac{1}{2}\frac{\varphi}{(\varphi')}w' \frac{2\frac{w'''}{w''}\frac{w''}{w'} - 3\left(\frac{w''}{w'}\right)^2 + 6\frac{(\varphi')}{\varphi}\frac{w''}{w'} - 3\frac{(\varphi'')}{(\varphi')}\left[2\frac{(\varphi')}{\varphi} - \frac{(\varphi'')}{(\varphi')} + \frac{2}{3}\frac{(\varphi''')}{(\nu'')}\right]}{\frac{w'''}{w''}\frac{w''}{w'} + 3\left[\frac{(\varphi')}{\varphi} - \frac{(\varphi'')}{(\varphi')}\right]\frac{w''}{w'} - 3\frac{(\varphi'')}{(\varphi')}\left[\frac{(\varphi')}{\varphi} - \frac{(\varphi'')}{(\varphi')} + \frac{1}{3}\frac{(\varphi''')}{(\varphi'')}\right]}.$$

Ce troisième progrès ne se réduit pas au second en faisant $w''' = 0$ et $\varphi''' = 0$. Si au lieu de y on avait $F(y)$ dans le premier membre, il suffirait dans le second de mettre $F(w)$, $(F'(w))$, $(F''(w))$, $(F'''(w))$ au lieu de w, w', w'', w'''.

Nous nous sommes servi de cette expression pour résoudre l'équation transcendante (32) du dernier exemple, en partant de la valeur fondamentale $w = 23$, de l'inconnue x, au lieu de celle que nous avons admise dans les calculs précédents, $w = 24$; l'expression (107) prend alors la forme plus simple

$$(108) \quad y = w - \frac{1}{2}\frac{\varphi}{(\varphi')}w' \frac{2\frac{(\varphi')}{\varphi} - \frac{(\varphi'')}{(\varphi')} + \frac{2}{3}\frac{(\varphi''')}{(\varphi'')}}{\frac{(\varphi')}{\varphi} - \frac{(\varphi'')}{(\varphi')} - \frac{1}{3}\frac{(\varphi''')}{(\varphi'')}}.$$

Précisons aussi les caractères principaux de la méthode.

1° Toute équation à résoudre ou à intégrer par rapport à une inconnue y,

$$\varphi(y) = 0$$

a pour solution (2) ou (22)″, cette inconnue pouvant dépendre d'une variable indépendante x, ou de plusieurs; plus généralement une fonction déterminée de l'inconnue, $F(y)$, a pour expression (3) ou (22) à laquelle on substitue dans la pratique une réduite telle que (107). Ces expressions fondamentales contiennent une quantité w totalement

arbitraire en principe, et sont par conséquent des expressions techniques; elles diffèrent en cela des expressions théoriques dont on fait ordinairement usage.

2° Quelle que soit la convergence, ou la divergence, de l'expression (3), les coefficients étant des fonctions déterminées de φ et de F formées avec les différentielles de ces fonctions, aucune fonction autre que la fonction $F(y)$, qui dépend de l'équation proposée, ne peut être représentée par cette expression. Il en résulte nécessairement que l'expression fondamentale représente dans tous les cas la fonction cherchée. C'est là un point très important qui, cependant, n'est généralement pas admis.

3° Les différentielles des fonctions φ et F, ou leurs dérivées, sont prises seulement par rapport à la quantité w [1]. S'il existe plusieurs inconnues $y_1, y_2, \ldots$, toutes doivent être considérées comme fonctions de celle d'entre elles qui sera calculée au moyen de l'équation dont il s'agit. C'est pour cette raison que cette équation, qui devrait s'écrire

$$\varphi(y_1, y_2 \ldots y_\alpha \ldots x_1, x_2, \ldots) = 0,$$

est simplement notée

$$\varphi(y_\alpha) = 0,$$

y_α étant l'inconnue désignée.

4° La résolution, ou l'intégration, d'une équation est donc ramenée par cette méthode au calcul des dérivées de l'inconnue et à la détermination de la quantité w.

5° Cette quantité w, *appelée valeur fondamentale*, s'obtient au moyen d'une équation réduite que l'on peut toujours former, même de plusieurs manières.

6° Dans les applications, il est nécessaire que les développements présentent une convergence suffisante; la condition principale de cette convergence est que la valeur fondamentale w diffère aussi peu que

---

(1) Nous avons fait usage d'une ancienne notation des différentielles partielles, au lieu de celle qui est adoptée ordinairement; la première a l'avantage de pouvoir être employée pour les dérivées partielles, ainsi que cela se présente dans les expressions (107) et (108).

possible de l'inconnue y, ce qui conduit à rechercher des équations réduites différant aussi peu que possible de l'équation proposée. Aussi l'équation réduite devra-t-elle être de même nature que celle-ci, c'est-à-dire que ces équations devront être du même degré ou du même ordre.

7° Si l'on ne pouvait obtenir ainsi la convergence voulue, on aurait recours, pour augmenter la convergence, et même pour y parvenir si elle n'existe pas primitivement, à l'un des procédés auxiliaires indiqués, lesquels peuvent être mis en usage ensemble ou séparément.

8° Si l'équation réduite ne donne pas les dérivées fondamentales avec une approximation suffisante, on aura recours à la différentiation de l'équation proposée, ou des équations, s'il en existe plusieurs, et par de simples résolutions d'équations linéaires on obtiendra, dans tous les cas, les dérivées cherchées à partir de l'ordre immédiatement supérieur à celui qui caractérise l'équation proposée comme équation différentielle. Ainsi pour les équations algébriques ou transcendantes, ou pour les équations aux différences finies, les dérivées peuvent être toutes ainsi calculées.

9° Si les dérivées de φ par rapport à y se confondent avec les dérivées totales de cette fonction, l'expression fondamentale présentera une indétermination. On évite cet inconvénient en considérant une ou plusieurs fonctions de y entrant dans les coefficients de l'équation comme des fonctions de x, et, conduisant les calculs comme dans le cas ordinaire, on parviendra, par des approximations successives, à obtenir l'inconnue [1].

Malgré les imperfections que l'on aura pu rencontrer dans notre travail, nous espérons nous être fait suffisamment comprendre pour qu'il soit possible dès maintenant de faire l'application de cette méthode aux questions difficiles de Mécanique et d'Astronomie, Sciences qui sont aujourd'hui arrêtées dans leurs développements, par l'impossibilité où l'on est de résoudre ou d'intégrer avec une exactitude suffisante les équations que l'on est parvenu à établir.

---

[1] Ce procédé nous paraît être le seul applicable dans ce cas, contrairement à ce que nous avons indiqué, à propos de l'intégration des équations différentielles, dans la note qui fait suite à l'expression $(23)''$.

Dans un complément nous donnerons les démonstrations et les développements théoriques que nous avons dû omettre jusqu'ici.

A présent, nous pouvons citer les paroles suivantes de Wronski [1], elles ne paraîtront sans doute plus exagérées :

Nous obtenons donc ainsi, d'une manière absolument générale, par l'application de notre méthode élémentaire secondaire, la solution complète des équations conjointes, quels que soient leur nombre et leur genre, soit primitives, immanentes ou transcendantes, soit dérivées, aux différences ou aux différentielles totales ou partielles. Et les géomètres remarqueront sans doute que c'est là précisément la solution du problème le plus grand et le plus difficile de leur science, de ce problème immense qu'ils osaient à peine envisager dans son infinie généralité.

Il nous reste à adresser tous nos remercîments à M. Resal qui a bien voulu accueillir ce travail dans son Journal ; nous lui en sommes d'autant plus reconnaissant que, jusqu'à ces temps derniers, les géomètres, pour la plupart, ont accordé peu de faveur à tout ce qui se rapporte à l'œuvre de Wronski. Nous remercions également M. Yvon Villarceau, le savant astronome, d'avoir bien voulu nous donner ses encouragements et ses conseils pendant la rédaction de ce Mémoire.

---

(1) *Réforme*, t. I, page cxvij.

COMPLÉMENT

RELATIF AUX MÉTHODES GÉNÉRALES DE WRONSKI.

Développements théoriques.

Dans l'exposition de la méthode précédente nous avons dû provisoirement supprimer certaines démonstrations et développements théoriques ; nous nous proposons maintenant de reprendre ces questions : elles serviront d'introduction à la méthode dont il s'agit ainsi qu'aux autres méthodes de Wronski.

Nous allons présenter la Loi suprême, principe fondamental des Mathématiques, d'après Wronski, et nous en déduirons, comme conséquences immédiates, les développements les plus importants des fonctions, puis nous examinerons un mode spécial de résolution des équations linéaires, l'intégration des équations linéaires à coefficients constants et la théorie de certaines fonctions symétriques.

I. — Loi suprême.

Considérations générales. — Wronski appelle *Loi suprême de l'Algorithmie* la loi fondamentale de la partie des Mathématiques désignée ordinairement sous le nom d'*Analyse* (¹).

Pour bien faire saisir le sens de cette loi, il est nécessaire de reproduire certaines considérations.

(¹) Le mot *algorithme* s'applique à la forme de certaines quantités, principalement aux expressions qui sont considérées comme primitives; on dit : algorithme des séries, algorithme différentiel, etc. En substituant le terme d'*algorithmie* à celui d'*analyse mathématique,* généralement adopté, Wronski a fait remarquer que l'analyse, opposée à la synthèse, est à proprement parler l'un des procédés employés en algorithmie; il ne convient donc pas de donner à une science le nom de l'un des procédés particuliers dont elle fait usage.

Wronski regarde les Sciences comme étant toutes constituées d'après un même principe ; elles comprennent trois parties fondamentales.

La première (a), qu'il nomme *Architectonique,* est la partie où sont produits les éléments nécessaires ou essentiels dont chaque science est composée.

La deuxième (b), dans laquelle on s'occupe d'établir les principes premiers ou lois fondamentales qui régissent l'objet même de la science, est la *Métaphysique.*

Enfin la troisième Partie (c), dans laquelle on établit les méthodes générales que l'on doit suivre nécessairement dans les applications des diverses branches de la science considérée, est la *Méthodologie.*

(a). L'Architectonique se divise elle-même en deux parties principales qu'il importe de bien distinguer : la *Théorie,* où se trouve donnée la nature du système par la production individuelle des objets qui le constituent (en Mathématiques elle a pour objet la construction des quantités), et la *Technie,* où a lieu l'accomplissement du système par la production de l'universalité en vue de fins ou de buts dans la génération des objets faisant partie de ce système (en Mathématiques elle a pour objet l'universalité dans la génération des quantités, c'est-à-dire leur évaluation). La théorie et la technie reposent sur des principes nécessaires.

La théorie contient les éléments qui constituent la science : les éléments proprement dits et les éléments systématiques. Parmi les premiers, il faut noter, en Mathématiques, les trois éléments ou algorithmes primitifs : les sommes (algorithme de la sommation), les produits (algorithme de la reproduction) et les puissances (algorithme de la graduation), et leurs inverses ; les schémas de ces trois algorithmes sont respectivement

$$A + B, \quad P \times Q, \quad M^N.$$

Le premier et le troisième élément sont hétérogènes en ce sens que le premier, comme élément immanent, implique l'idée du fini, il est le principe premier et constitutif de toute l'algorithmie, et que le troisième, comme élément transcendant, implique l'idée de l'infini (¹), il sert de principe régulatif à cette même science.

Le second élément participant aux propriétés des deux autres en forme pour ainsi dire le lien commun ; Wronski le nomme *élément neutre,* il caractérise de cette manière le système entier.

En dehors des éléments nécessaires, en nombre limité, que l'on doit con-

---

(¹) Ces deux idées du fini et de l'infini ont respectivement pour corollaire celles de la discontinuité et de la continuité.

sidérer spécialement, la théorie contient un nombre illimité de lois indépendantes. Les géomètres dans leurs spéculations ordinaires s'occupent à peu près exclusivement de théorie. C'est à la théorie qu'il faut rapporter les systèmes d'intégrations finies qu'ils recherchent particulièrement; en dehors des difficultés très grandes que suscite le problème ainsi posé, on se rend compte qu'il faut posséder un nombre considérable de fonctions déjà étudiées pour reconnaître celles qui peuvent offrir les solutions sous la forme désirée, et il faut de plus que ces solutions soient susceptibles d'être utilisées dans les applications.

Ici se pose nettement la nécessité de la génération des fonctions (données explicitement ou implicitement) par des moyens universels permettant l'évaluation des quantités qu'elles représentent; on ne s'astreindra plus alors à leur donner une forme finie, on devra se proposer au contraire de réduire au minimum le nombre des fonctions connues d'avance, ou, pour mieux dire, le nombre des *fonctions primitives* ou fondamentales au moyen desquelles seront exprimées les solutions. Ces fonctions, comme nous l'avons montré, sont les logarithmes et les sinus des divers ordres; elles sont, en quelque sorte, des mesures ou unités de comparaison. Les expressions techniques dont on fera ainsi usage établissent les relations qui existent entre les fonctions théoriques qu'elles représentent et les mesures choisies.

L'évaluation générale des quantités par un procédé unique consiste donc à transformer les fonctions théoriques au moyen d'algorithmes techniques qui sont, d'une part, les séries ainsi que les fractions continues, et, d'autre part, les facultés algorithmiques ainsi que les produites continues (produits infinis de facteurs), puis les fonctions d'interpolation.

Il existe encore un algorithme universel auquel tous les autres peuvent se ramener, c'est la loi suprême qui vient ainsi clore le système architectonique; les trois éléments primitifs y sont caractérisés. Par là cette loi fondamentale est à la fois celle de la théorie et celle de la technie; on peut donc en déduire toutes les lois théoriques et techniques, sauf les lois singulières de la théorie des nombres qui font exception [1].

(*b*). La loi suprême engendrant le système entier doit pouvoir être établie *a priori* d'après les conditions seules qui permettent de concevoir la science dont il s'agit. L'établissement de cette loi est le premier objet et le plus important de la métaphysique.

La métaphysique doit aussi traiter un problème très général se rapportant

---

[1] Cependant la loi fondamentale de la théorie des nombres, pour se conformer au système entier de l'algorithmie, puise dans la loi suprême la possibilité de son existence.

spécialement à la technie; Wronski le nomme pour cette raison *Problème universel*. Mais, d'après ce qui précède, ce problème peut se déduire de la loi suprême, comme cela a lieu effectivement.

La métaphysique, comme troisième objet principal, doit enfin donner le principe fondamental de la théorie des nombres.

Pour en revenir à la déduction *a priori* de la loi suprême et afin de procéder méthodiquement, il convient de reconnaitre la *nécessité* et la *possibilité*, puis l'*effectivité* de cette loi; ces conditions se conçoivent comme devant renfermer toutes les conditions ultérieures : il est par là indispensable de les examiner.

1° La nécessité de la loi suprême, comme nous venons de le voir, provient de la nécessité d'une forme unique de la génération des quantités pour la concordance des divers modes de cette génération. Nous allons revenir sur cette nécessité de la génération universelle des quantités.

2° Wronski a démontré la possibilité de la loi suprême vers la fin de l'*Introduction à la Philosophie des Mathématiques*. Il fait voir que les algorithmes techniques peuvent se ramener à une forme unique; si $F(x)$ est la fonction qu'il s'agit d'exprimer, $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots$ également des fonctions de la quantité x, mais choisies arbitrairement en principe, et $A_0, A_1, A_2, \ldots$ des coefficients convenablement déterminés, toutes les expressions possibles de la fonction $F(x)$ peuvent se ramener à la forme

$$F(x) = A_0\,\Omega_0 + A_1\,\Omega_1 + A_2\,\Omega_2 + \ldots.$$

Cette possibilité est technique, elle se rapporte à la forme de la fonction; mais la possibilité considérée par rapport à la fonction même, c'est-à-dire la possibilité théorique, réside dans les conditions à remplir pour que les fonctions Ω puissent servir à la détermination des coefficients A. Les développements relatifs à cette manière de voir sont donnés au commencement de la *Philosophie de la Technie*, première Section [1].

3° Le point de vue auquel nous devons ici nous placer plus particulièrement est celui de l'effectivité de la loi en question : nous y retrouverons naturellement les conditions de nécessité et de possibilité.

Nous allons ainsi avoir à préciser la conception de la loi suprême, à établir son expression, puis à la déterminer, c'est-à-dire que nous examinerons successivement la *signification*, la *fondation* et la *détermination* de cette loi.

---

[1] Wronski donne encore au commencement du même Ouvrage une considération philosophique de cette possibilité.

1° *Signification de la loi suprême.* — Pour reconnaître en quoi consiste la loi suprême, il faut d'abord remonter à l'objet même des Mathématiques, car cette loi doit évidemment porter sur cet objet qui en est le *contenu*. Il faut ensuite, pour ce qui concerne la *forme*, rechercher la manière dont est constitué cet objet, eu égard aux conditions philosophiques requises.

Nous aurons donc à déterminer l'objet de la science : il faudra recourir pour cela à la propriété essentielle de cet objet, c'est-à-dire le définir.

On concevra alors, d'après ce que l'on sait généralement, que la loi fondamentale du système entier consiste précisément dans cette définition même, et l'on pourra par suite en déduire toutes les propriétés du système ([1]). C'est ainsi que l'on reconnaît la nécessité d'une loi fondamentale, comme nous l'avons annoncé plus haut.

Cette conception, prise dans cet état de généralité, est certainement due à Wronski; elle est d'un usage universel et systématique, et elle constitue le point le plus important de sa doctrine.

Rappelons maintenant que la *grandeur* est l'objet des sciences mathématiques. En algorithmie la grandeur porte plus particulièrement le nom de *quantité*.

Wronski remarque avec raison que définir ainsi la grandeur : ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution, est une pure tautologie. « En effet, les conceptions de l'augmentation et de la diminution sont contenues analytiquement dans celle de la grandeur, et de plus elles ne sauraient avoir lieu sans cette dernière. » La grandeur est « l'état d'un objet considéré au point de vue de la réunion de ce qu'il contient d'uniforme et d'homogène ».

La grandeur ou la quantité, ainsi définie, n'est que l'objet élémentaire de l'algorithmie : il faut, dans le cas qui nous occupe, la considérer au point de vue systématique, c'est-à-dire, par rapport à un ensemble ou un système de quantités. La quantité porte alors le nom de *fonction*, et nous dirons qu'une fonction est l'expression de la loi de dépendance de plusieurs quantités.

L'algorithmie a ainsi pour objet l'étude des fonctions et la loi suprême

---

([1]) Wronski substitue aux *règles* communes auxquelles on assujettit ordinairement les définitions des *lois* qui en déterminent les conditions absolues. Les définitions ont alors dans leurs conséquences la portée la plus étendue qu'elles puissent avoir.

Une règle est l'indication de la manière de procéder pour l'obtention d'un objet, elle ne peut conduire qu'à une détermination particulière de cet objet. Une règle ne suppose nécessairement aucune relation entre la chose à obtenir et la manière d'y parvenir. Une loi, au contraire, est la détermination rationnelle d'un objet, ou tout au moins une détermination supposée telle. Une loi seule peut servir de principe et non une règle; nous en avons déjà fait la remarque plus haut à propos de la définition des séries (*Digression sur les séries*).

n'est autre chose que la définition des fonctions explicitement exprimée au moyen d'algorithmes primitifs.

Pour établir la loi suprême, ou l'expression algorithmique la plus générale des fonctions, désignons par $F(x)$ une fonction d'une quantité x; $F(x)$ est l'objet même ou le contenu de la loi. Pour le cas fondamental il suffit d'admettre une seule variable; nous examinerons plus loin l'extension à donner à la loi dans le cas de plusieurs variables. Quant à la forme de la loi, ou à son expression, elle contient nécessairement les deux éléments primitifs hétérogènes. Mais ici ces deux éléments doivent être pris dans un état d'universalité correspondant à celle de la fonction proposée $F(x)$; à cet effet ils doivent présenter un caractère indéfini qu'ils ne possèdent pas quand on les considère comme simples éléments. De plus l'élément fondamental devra intervenir pour relier entre eux les deux éléments hétérogènes.

En conséquence, l'expression de la fonction proposée se composera d'une somme de quantités, et cette somme sera indéfinie. D'autre part, pour ce qui concerne ces quantités mêmes, celles-ci contiendront l'élément transcendant : il faudra donc leur attribuer un caractère indéfini; pour cela, sans les préciser davantage, il suffira de les désigner par des symboles. Ces quantités, dans leur généralité, dépendront de la quantité élémentaire x : elles seront donc des fonctions de x.

Cette expression, composée ainsi d'une somme de fonctions, ne constituerait de cette manière qu'un simple agrégat ou réunion sans unité autre que celle qu'on voudrait implicitement lui attribuer; il en résulte, pour achever l'expression cherchée et la constituer définitivement, qu'il convient de faire ressortir la liaison nécessaire des termes de la somme indéfinie dont il est question, ce qui se réalisera au moyen de l'élément fondamental. Or cette liaison ne peut maintenant s'établir qu'au moyen de certaines quantités contenues dans les divers termes et ayant une certaine dépendance avec toutes celles que nous avons déjà reconnues.

Nous désignerons par $A_0, A_1, A_2, \ldots$ ces nouvelles quantités (que l'on nomme *coefficients*), et par $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots$ celles qui dépendent essentiellement de x. Les quantités A seront conséquemment formées avec les quantités Ω tout en étant indépendantes des variations que peut subir x; car, s'il en était autrement, elles joueraient le même rôle que ces dernières et la distinction de ces deux espèces de quantités n'aurait plus lieu. Il existe cependant des développements dans lesquels les coefficients sont des fonctions de x, mais ils peuvent toujours se ramener au cas où les coefficients sont des quantités constantes; Wronski a considéré ces développements particuliers : il leur donne le nom de développements *incomplets*.

Il reste à voir comment dans chaque terme les coefficients se combinent aux

fonctions Ω. A première vue, le mode de relation paraît être indifférent, parce que la composition des quantités A dépend de cette relation ; mais, puisqu'il existe une sorte d'indétermination, il conviendra de choisir cette relation de manière qu'elle soit aussi simple que possible et qu'elle présente en même temps une complète généralité ; ces conditions se retrouvent dans l'élément fondamental seul : les quantités A devront donc multiplier les fonctions Ω ; par suite, ces quantités seront bien les coefficients des divers termes.

Ainsi la loi suprême a pour expression

$$F(x) = A_0 \Omega_0 + A_1 \Omega_1 + A_2 \Omega_2 + \ldots \textit{ indéfiniment : } \tag{1}$$

telle est l'expression la plus générale des fonctions.

On conçoit *a posteriori* qu'il en soit ainsi, quelque paradoxale que cette forme puisse paraître, puisque les fonctions Ω sont absolument arbitraires et que leur nombre n'est pas limité : la liaison des différents termes opérée par les coefficients, dont la forme est soumise à une loi déterminée, est seule nécessaire, comme nous allons le voir, et toute détermination ou limitation des fonctions Ω particulariserait la loi.

2° *Fondation de la loi suprême.* — Maintenant que nous sommes parvenu à l'expression de la loi suprême, il faut déterminer la forme de ses coefficients ; nous abandonnons ainsi le domaine de la Métaphysique pour entrer dans celui des Mathématiques pures.

Avant d'aller plus loin, nous devons faire remarquer que nous avons strictement observé les conditions philosophiques prescrites par Wronski dans ses divers Ouvrages, et, si ce géomètre n'a pas donné lui-même une déduction analogue de sa loi, cela tient seulement à ce qu'il n'avait pas voulu produire sa philosophie avant la publication de ses principaux Ouvrages mathématiques.

La déduction précédente établit *a priori* la forme de la loi suprême, mais, dans le cas où l'on voudrait s'en tenir à la partie purement mathématique de cette loi, il suffirait d'admettre l'expression (1) et les conséquences qui en seront données serviront à la justifier.

La loi suprême contenant en elle-même sa propre détermination, la loi de formation des coefficients doit être donnée *a priori,* et l'on ne peut admettre à cet effet aucun calcul dépendant d'une théorie proprement dite ; les relations qui donnent l'expression générale des coefficients A ne peuvent donc provenir que de simples transformations ou relations d'identités. Les systèmes de transformations dont nous ferons usage constituent ce que l'on appelle la *Théorie des Déterminants ;* elle peut s'établir d'une manière indépendante, comme on le sait. Wronski possédait antérieurement à 1811 une théorie très complète des déterminants qu'il nommait *Sommes combinatoires* ou *Fonctions schin.*

d'après la caractéristique hébraïque qui lui servait à les noter (1). Nous ne pouvons reproduire le théorème important qui est la base de sa théorie et qu'il a publié dans la première Section de la *Philosophie de la Technie* comme introduction à sa loi suprême ([1]). Pour ce qui va suivre, il suffira d'admettre quelques propositions très élémentaires et suffisamment connues.

Remarquons, sans nuire à la généralité de l'expression (1), que l'on peut toujours faire Ω_0 égal à l'unité. Dans cette supposition, effectuons sur les fonctions de x contenues dans l'expression (1) une certaine opération que nous caractériserons par la lettre Δ et désignons par un exposant le nombre des opérations, d'ailleurs quelconques, successivement effectuées sur les mêmes fonctions : nous avons

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta^1 F(x) = A_1 \Delta^1 \Omega_1 + A_2 \Delta^1 \Omega_2 + \ldots + A_\mu \Delta^1 \Omega_\mu + \ldots, \\ \Delta^2 F(x) = A_1 \Delta^2 \Omega_1 + A_2 \Delta^2 \Omega_2 + \ldots + A_\mu \Delta^2 \Omega_\mu + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta^\mu F(x) = A_1 \Delta^\mu \Omega_1 + A_2 \Delta^\mu \Omega_2 + \ldots + A_\mu \Delta^\mu \Omega_\mu + \ldots. \end{array} \right.$$

On obtient ainsi autant de relations que l'on désire, et, en supposant que la variable x prenne une valeur particulière, on pourra déterminer autant de coefficients que l'on voudra.

$\mu + 1$ est le nombre des relations précédentes comprises dans (1) et (2); considérons le déterminant d'ordre μ

$$(3)\qquad X_\mu(\Theta) = \text{Ⓓ}[\Delta^1 \Omega_1 \Delta^2 \Omega_2 \ldots \Delta^{\mu-1} \Omega_{\mu-1} \Delta^\mu \Theta],$$

dans lequel la fonction Θ représente indifféremment la fonction $F(x)$ ou l'une quelconque des fonctions Ω.

En ordonnant par rapport à la fonction Θ, ce déterminant peut s'écrire

$$(4)\qquad X_\mu(\Theta) = \Sigma_\mu (-1)^\nu \Delta^\nu \Theta \,\text{Ⓓ}[\Delta^1 \Omega_1 \Delta^2 \Omega_2 \ldots \Delta^{\nu-1} \Omega_{\nu-1} \Delta^{\nu+1} \Omega_{\nu+1} \ldots \Delta^{\mu-1} \Omega_{\mu-1}].$$

Multiplions les deux nombres de la première égalité (2) par le déterminant mineur de (4) correspondant à $\Delta^\mu \Theta$, les deux membres de la seconde égalité par le déterminant mineur correspondant à $\Delta^{\mu-1}\Theta$, et ainsi de suite jusqu'à la dernière égalité, puis additionnons-les toutes, nous obtenons

$$X_\mu(Fx) = A_\mu\, X_\mu(\Omega_\mu) + A_{\mu+1}\, X_\mu(\Omega_{\mu+1}) + A_{\mu+2}\, X_\mu(\Omega_{\mu+2}) + \ldots,$$

([1]) Le professeur Th. Muir, dans son récent Traité sur les déterminants, donne quelques-unes des propriétés des déterminants considérés particulièrement par Wronski, et il ajoute ensuite : en 1815, Wronski poussa très loin l'étude des fonctions schin, comme il vient d'être dit (Chap. IV, *Treatise on the Theory of determinants*. London, Macmillan, 1882).

d'où il vient

$$A_\mu = \frac{X_\mu(Fx)}{X_\mu(\Omega_\mu)} - A_{\mu+1}\frac{X_\mu(\Omega_{\mu+1})}{X_\mu(\Omega_\mu)} - A_{\mu+2}\frac{X_\mu(\Omega_{\mu+2})}{X_\mu(\Omega_\mu)} - \ldots$$

Faisons, pour simplifier,

$$(5)\qquad \Xi_\mu = \frac{X_\mu(Fx)}{X_\mu(\Omega_\mu)},\quad \Phi_\mu(\omega) = \frac{X_\mu(\Omega_\omega)}{X_\mu(\Omega_\mu)},$$

la relation précédente deviendra

$$(6)\qquad A_\mu = \Xi_\mu - A_{\mu+1}\Phi_\mu(\mu+1) - A_{\mu+2}\Phi_\mu(\mu+2) - \ldots.$$

Or μ est un indice arbitraire : on a donc aussi

$$A_{\mu+1} = \Xi_{\mu+1} - A_{\mu+2}\Phi_{\mu+1}(\mu+2) - A_{\mu+3}\Phi_{\mu+1}(\mu+3) - \ldots$$

et, substituant cette valeur de $A_{\mu+1}$ dans celle de A_μ, il vient

$$\begin{aligned} A_\mu = \Xi_\mu - \Xi_{\mu+1}\Phi_\mu(\mu+1) &- A_{\mu+2}[\Phi_\mu(\mu+2) - \Phi_\mu(\mu+1)\Phi_{\mu+1}(\mu+2)] \\ &- A_{\mu+3}[\Phi_\mu(\mu+3) - \Phi_\mu(\mu+1)\Phi_{\mu+1}(\mu+3)] - \ldots. \end{aligned}$$

Désignons $-\Phi_\mu(\mu+1)$ par $\Psi_1(\mu)$, A_μ est alors

$$\begin{aligned} A_\mu = \Xi_\mu + \Xi_{\mu+1}\Phi_1(\mu) &- A_{\mu+2}[\Phi_\mu(\mu+2) + \Psi_1(\mu)\Phi_{\mu+1}(\mu+2)] \\ &- A_{\mu+3}[\Phi_\mu(\mu+3) + \Psi_1(\mu)\Phi_{\mu+1}(\mu+3)] - \ldots. \end{aligned}$$

On a encore, d'après (6),

$$A_{\mu+2} = \Xi_{\mu+2} - A_{\mu+3}\Phi_{\mu+2}(\mu+3) - A_{\mu+4}\Phi_{\mu+2}(\mu+4) - \ldots;$$

substituant cette valeur de $A_{\mu+2}$ dans la valeur précédente de A_μ, et posant

$$\Psi_2(\mu) = -\Phi_\mu(\mu+2) - \Psi_1(\mu)\Phi_{\mu+1}(\mu+2),$$

on a

$$\begin{aligned} A_\mu = \Xi_\mu &+ \Xi_{\mu+1}\Psi_1(\mu) + \Xi_{\mu+2}\Psi_2(\mu) \\ &- A_{\mu+3}[\Phi_\mu(\mu+3) + \Psi_1(\mu)\Phi_{\mu+1}(\mu+3) + \Psi_2(\mu)\Phi_{\mu+2}(\mu+3)] \\ &- A_{\mu+4}[\Phi_\mu(\mu+4) + \Psi_1(\mu)\Phi_{\mu+1}(\mu+4) + \Psi_2(\mu)\Phi_{\mu+2}(\mu+4)] - \ldots. \end{aligned}$$

En continuant ainsi, admettons que l'on ait

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} A_\mu = \Xi_\mu &+ \Xi_{\mu+1}\Psi_1(\mu) + \Xi_{\mu+2}\Psi_2(\mu) + \ldots + \Xi_{\mu+\nu}\Psi_\nu(\mu) \\ &- A_{\mu+\nu+1}[\Phi_\mu(\mu+\nu+1) + \Psi_1(\mu)\Phi_{\mu+1}(\mu+\nu+1) + \ldots \\ &\qquad + \Psi_\nu(\mu)\Phi_{\mu+\nu}(\mu+\nu+1)] \\ &- A_{\mu+\nu+2}[\Phi_\mu(\mu+\nu+2) + \Psi_1(\mu)\Phi_{\mu+1}(\mu+\nu+2) + \ldots \\ &\qquad + \Psi_\nu(\mu)\Phi_{\mu+\nu}(\mu+\nu+2)] \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{aligned}\right.$$

désignons par $-\Psi_{\nu+1}(\mu)$ le coefficient de $A_{\mu+\nu+1}$ et remplaçons cette quantité $A_{\mu+\nu+1}$ par son expression déduite de (6), savoir :

$$A_{\mu+\nu+1} = \Xi_{\mu+\nu+1} - A_{\mu+\nu+2}\,\Phi_{\mu+\nu+1}(\mu+\nu+2) - A_{\mu+\nu+3}\,\Phi_{\mu+\nu+1}(\mu+\nu+3) - \ldots,$$

il vient

$$(7)'\quad \left\{\begin{aligned} A_\mu = \Xi_\mu &+ \Xi_{\mu+1}\Psi_1(\mu) + \ldots + \Xi_{\mu+\nu}\Psi_\nu(\mu) + \Xi_{\mu+\nu+1}\Psi_{\nu+1}(\mu) \\ &- A_{\mu+\nu+2}[\Phi_\mu(\mu+\nu+2) + \Psi_1(\mu)\Phi_{\mu+1}(\mu+\nu+2) + \ldots \\ &\qquad + \Psi_{\nu+1}(\mu)\Phi_{\mu+\nu+1}(\mu+\nu+2)] \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Or cette expression a identiquement la même composition que la précédente (7); celle-ci subsiste donc quel que soit l'indice ν, c'est-à-dire quel que soit le nombre des substitutions des quantités A (à indices supérieurs à μ) que l'on aura effectuées, puisque nous avons vu que l'expression (7) avait lieu également pour la première substitution, c'est-à-dire pour $\nu = 1$.

Nous pouvons donc concevoir un nombre indéfini de ces substitutions; on aura ainsi pour l'expression du coefficient cherché

$$(8)\qquad A_\mu = \Xi_\mu + \Xi_{\mu+1}\Psi_1(\mu) + \Xi_{\mu+2}\Psi_2(\mu) + \Xi_{\mu+3}\Psi_3(\mu) + \ldots.$$

Cette suite est *indéfinie* et la quantité x qui entre dans les quantités composant cette expression a une valeur quelconque mais déterminée, a. Joignant à cette expression celle des fonctions Ψ

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \Psi_\nu(\mu) = &-\Phi_\mu(\mu+\nu) - \Psi_1(\mu)\Phi_{\mu+1}(\mu+\nu) - \Psi_2(\mu)\Phi_{\mu+2}(\mu+\nu) - \ldots \\ &- \Psi_{\nu-1}(\mu)\Phi_{\mu+\nu-1}(\mu+\nu), \end{aligned}\right.$$

et celles des fonctions Φ, Ξ et X, données par (5) et (3), on a tous les éléments

nécessaires pour calculer les coefficients de la loi suprême, ou de l'expression (1) dans laquelle on fait $\Omega_0 = 1$, savoir

$$(10) \qquad F(x) = A_0 + A_1\Omega_1 + A_2\Omega_2 + A_3\Omega_3 + \ldots.$$

Rappelons encore que la caractéristique Δ est jusqu'à présent l'indice d'une opération quelconque effectuée sur les fonctions F et Ω qui sont toutes indépendantes ; c'est pour ces raisons que la loi (10) est la loi suprême de l'algorithmie.

En calculant les premières quantités données par les formules (8), (9) et (5), on obtient

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} A_0 &= \Xi_0 + \Xi_1\Psi_1(0) + \Xi_2\Psi_2(0) + \ldots, \\ A_1 &= \Xi_1 + \Xi_2\Psi_1(1) + \Xi_3\Psi_2(1) + \ldots, \\ A_2 &= \Xi_2 + \Xi_3\Psi_1(2) + \Xi_4\Psi_2(2) + \ldots; \\ \Psi_1(\mu) &= -\Phi_\mu(\mu+1), \\ \Psi_2(\mu) &= -\Phi_\mu(\mu+2) - \Psi_1(\mu)\,\Phi_{\mu+1}(\mu+2), \\ \Psi_3(\mu) &= -\Phi_\mu(\mu+3) - \Psi_1(\mu)\,\Phi_{\mu+1}(\mu+3) - \Psi_2(\mu)\,\Phi_{\mu+2}(\mu+3); \\ \Phi_0(\mu) &= \Omega_\mu, \\ \Phi_1(\mu) &= \frac{\Delta\Omega_\mu}{\Delta\Omega_1}, \\ \Phi_2(\mu) &= \frac{℘[\Delta^1\Omega_1 . \Delta^2\Omega_\mu]}{℘[\Delta^1\Omega_1 . \Delta^2\Omega_2]}, \\ \Phi_3(\mu) &= \frac{℘[\Delta^1\Omega_1 . \Delta^2\Omega_2 . \Delta^3\Omega_\mu]}{℘[\Delta^1\Omega_1 . \Delta^2\Omega_2 . \Delta^3\Omega_3]}; \\ \Xi_0 &= F(a), \\ \Xi_1 &= \frac{\Delta F(a)}{\Delta\Omega_1}, \\ \Xi_2 &= \frac{℘[\Delta^1\Omega_1 . \Delta^2 F(a)]}{℘[\Delta^1\Omega_1 . \Delta^2\Omega_2]}, \\ \Xi_3 &= \frac{℘[\Delta^1\Omega_1 . \Delta^2\Omega_2 . \Delta^3 F(a)]}{℘[\Delta^1\Omega_1 . \Delta^2\Omega_2 . \Delta^3\Omega_3]}, \end{aligned} \right.$$

et ainsi de suite. Dans toutes ces quantités qui font partie des coefficients, on doit substituer à la quantité x une valeur quelconque déterminée de cette variable, a.

L'expression de la loi suprême est complètement générale, cependant elle admet des cas d'impossibilité; nous les avons fait connaître précédemment (au commencement de la méthode secondaire que nous avons exposée), et il est inutile de les reproduire. Il suffit dans tous les cas de s'en tenir à l'expression

(10) de la loi suprême sans faire attention aux conditions fondamentales (2) de la génération de la fonction $F(x)$; car, lorsqu'une telle génération est impossible, relativement ou absolument, l'expression de la loi suprême le fera toujours connaître en donnant pour les coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots$ des quantités infinies ou absurdes.

Dans le cas où cette génération est possible, l'expression (10) peut toujours être rendue convergente, comme nous le verrons plus loin; d'ailleurs cette convergence est indispensable, puisque la loi suprême porte en elle-même sa propre détermination. Mais cette question se rapporte spécialement à la détermination des fonctions Ω, c'est-à-dire à la méthode suprême.

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que le cas d'une fonction d'une seule variable x, si cette fonction dépend de plusieurs variables indépendantes $x_1, x_2, x_3, \ldots$ on déduirait facilement de ce qui précède la nouvelle expression de la loi suprême. En effet, en vertu de (1), on a, en considérant la variable x_1,

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, \ldots) &= A_0\,\Omega_0(x_1, x_2, x_3, \ldots) \\ &+ A_1\,\Omega_1(x_1, x_2, x_3, \ldots) + A_2\,\Omega_2(x_1, x_2, x_3, \ldots) + \ldots, \end{aligned} \right.$$

et les coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots$ ne dépendant que des variables $x_2, x_3, \ldots$. Considérant à leur tour ces quantités comme des fonctions de x_2 seulement, on a encore, en vertu de (1),

$$\begin{aligned} A_0 &= A_{00}\,\Omega_{00}(x_2, x_3, \ldots) + A_{01}\,\Omega_{01}(x_2, x_3, \ldots) + A_{02}\,\Omega_{02}(x_2, x_3, \ldots) + \ldots, \\ A_1 &= A_{10}\,\Omega_{10}(x_2, x_3, \ldots) + A_{11}\,\Omega_{11}(x_2, x_3, \ldots) + A_{12}\,\Omega_{12}(x_2, x_3, \ldots) + \ldots, \\ A_2 &= A_{20}\,\Omega_{20}(x_2, x_3, \ldots) + A_{21}\,\Omega_{21}(x_2, x_3, \ldots) + A_{22}\,\Omega_{22}(x_2, x_3, \ldots) + \ldots, \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Substituant ces coefficients dans l'expression précédente, il vient

$$(12)'\quad \left\{ \begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = {} & A_{00}\,\Omega_0(x_1, x_2, x_3, \ldots)\,\Omega_{00}(x_2, x_3, \ldots) \\ & + A_{01}\,\Omega_0(x_1, x_2, x_3, \ldots)\,\Omega_{01}(x_2, x_3, \ldots) \\ & + A_{02}\,\Omega_0(x_1, x_2, x_3, \ldots)\,\Omega_{02}(x_2, x_3, \ldots) + \ldots \\ & + A_{10}\,\Omega_1(x_1, x_2, x_3, \ldots)\,\Omega_{10}(x_2, x_3, \ldots) \\ & + A_{11}\,\Omega_1(x_1, x_2, x_3, \ldots)\,\Omega_{11}(x_2, x_3, \ldots) \\ & + A_{12}\,\Omega_1(x_1, x_2, x_3, \ldots)\,\Omega_{12}(x_2, x_3, \ldots) + \ldots \\ & + A_{20}\,\Omega_2(x_1, x_2, x_3, \ldots)\,\Omega_{20}(x_2, x_3, \ldots) \\ & + A_{21}\,\Omega_2(x_1, x_2, x_3, \ldots)\,\Omega_{21}(x_2, x_3, \ldots) \\ & + A_{22}\,\Omega_2(x_1, x_2, x_3, \ldots)\,\Omega_{22}(x_2, x_3, \ldots) + \ldots \end{aligned} \right.$$

Les coefficients $A_{00}, A_{01}, A_{02}, \ldots, A_{10}, A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{20}, A_{21}, A_{22}, \ldots$ ne sont plus que des fonctions de $x_3, x_4, \ldots$; ils peuvent à leur tour être développés comme les précédents, et ainsi de suite jusqu'à ce que les derniers coefficients soient indépendants des variables considérées. Ainsi la loi suprême (1) est bien le principe de la génération de toutes les fonctions.

3° *Détermination de la loi suprême.* — Les formules précédentes donnent les expressions des coefficients de toute espèce de développement; cependant, pour qu'elles puissent recevoir des applications, il est nécessaire de déterminer l'opération caractérisée par Δ ainsi que les relations qui ont lieu entre les quantités que nous avons considérées plus haut, spécialement les relations qui existent entre les quantités consécutives $\Phi_{\mu-1}$ et Φ_μ, ou $\Xi_{\mu-1}$ et Ξ_μ; nous aurons ainsi la détermination complète de la loi suprême.

Les propriétés des quantités Φ ou Ξ dépendent naturellement de celles des quantités X, et les propriétés de ces dernières dérivent d'une proposition relative aux déterminants.

Théorème. — Nous n'avons fait encore usage que de la relation élémentaire d'un déterminant et de ses déterminants mineurs; considérons maintenant, comme relation systématique, celle qui a lieu entre un déterminant d'un certain ordre μ et un déterminant d'un ordre inférieur à $\mu - 1$, composé des mêmes éléments. Parmi les propositions que l'on peut admettre, nous examinerons la plus simple, celle qui se rapporte à la relation de deux déterminants d'ordres μ et $\mu - 2$; elle est en effet le principe de propositions plus complexes [1] : elle devra donc suffire, comme nous le verrons.

En désignant un élément quelconque par a avec un indice supérieur et un indice inférieur, la proposition dont il s'agit est exprimée par la relation suivante :

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \mathcal{D}\left[a_1^1 \ldots a_{\mu-2}^{\mu-2}\, a_{\mu-1}^{\mu-1}\right] & \mathcal{D}\left[a_1^1 \ldots a_{\mu-2}^{\mu-2}\, a_{\mu}^{\mu-1}\right] \\ \mathcal{D}\left[a_1^1 \ldots a_{\mu-2}^{\mu-2}\, a_{\mu-1}^{\mu}\right] & \mathcal{D}\left[a_1^1 \ldots a_{\mu-2}^{\mu-2}\, a_{\mu}^{\mu}\right] \end{vmatrix} \\ &\quad = \mathcal{D}\left[a_1^1 \ldots a_{\mu-2}^{\mu-2}\, a_{\mu-1}^{\mu-1}\, a_{\mu}^{\mu}\right] \ \mathcal{D}\left[a_1^1 \ldots a_{\mu-2}^{\mu-2}\right]. \end{aligned}\right.$$

Le premier membre de cette égalité est un déterminant de quatre éléments complexes rangés en carré; le second nombre n'est que le résultat de l'opération indiquée dans le premier. Pour démontrer la proposition, il suffit d'effectuer ce calcul.

Supposons les quatre déterminants d'ordre $\mu - 1$ développés par rapport à

---

[1] Il est inutile d'énoncer ces propositions, qui n'ont qu'un simple intérêt de spéculation; la forme de l'égalité (13) rappelle leur forme générale.

leurs éléments $a_{\mu-1}$ et a_μ, désignons par $A_1, A_2, \ldots, A_{\mu-2}, A_{\mu-1}$ les déterminants mineurs, y compris les signes, des deux déterminants de la première colonne, et par $B_1, B_2, \ldots, B_{\mu-2}, B_{\mu-1}$ ceux des déterminants de la deuxième colonne; on remarquera que les déterminants $A_{\mu-1}$ et $B_{\mu-1}$ ne sont autres que le déterminant d'ordre $\mu - 2$ du second membre de (13) : désignons-le par C. Effectuant alors les opérations indiquées dans le premier membre et ordonnant les produits par rapport à C, il vient

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & C^2 \left(a_\mu^\mu . a_{\mu-1}^{\mu-1} - a_\mu^{\mu-1} a_{\mu-1}^\mu \right) \\ & + C \Big[a_\mu^\mu \left(a_{\mu-1}^1 A_1 + a_{\mu-1}^2 A_2 + \ldots + a_{\mu-1}^{\mu-2} A_{\mu-2} \right) \\ & \qquad + a_{\mu-1}^{\mu-1} \left(a_\mu^1 B_1 + a_\mu^2 B_2 + \ldots + a_\mu^{\mu-2} B_{\mu-2} \right) \\ & \qquad - a_{\mu-1}^\mu \left(a_\mu^1 A_1 + a_\mu^2 A_2 + \ldots + a_\mu^{\mu-2} A_{\mu-2} \right) \\ & \qquad - a_\mu^{\mu-1} \left(a_{\mu-1}^1 B_1 + a_{\mu-1}^2 B_2 + \ldots + a_{\mu-1}^{\mu-2} B_{\mu-2} \right) \Big] \\ & + \left(a_{\mu-1}^1 A_1 + a_{\mu-1}^2 A_2 + \ldots + a_{\mu-1}^{\mu-2} A_{\mu-2} \right) \\ & \times \left(a_\mu^1 B_1 + a_\mu^2 B_2 + \ldots + a_\mu^{\mu-2} B_{\mu-2} \right) \\ & - \left(a_\mu^1 A_1 + a_\mu^2 A_2 + \ldots + a_\mu^{\mu-2} A_{\mu-2} \right) \\ & \times \left(a_{\mu-1}^1 B_1 + a_{\mu-1}^2 B_2 + \ldots + a_{\mu-1}^{\mu-2} B_{\mu-2} \right). \end{aligned} \right.$$

Les produits des deux derniers termes peuvent être groupés comme il suit, r, p, q étant des indices généraux :

$$\Sigma A_r B_r \left(a_{\mu-1}^r a_\mu^r - a_\mu^r a_{\mu-1}^r \right) + \Sigma \left(A_p B_q - A_q B_p \right) \left(a_{\mu-1}^p a_\mu^q - a_\mu^p a_{\mu-1}^q \right).$$

La première somme est nulle; quant à la seconde, on trouve dans le facteur $A_p B_q - A_q B_p$ les éléments a_m^p, a_n^p, a_m^q, a_n^q et $a_m^{\mu-1}$, $a_n^{\mu-1}$, a_m^μ, a_n^μ; donc, si D est un certain déterminant mineur d'ordre $\mu - 3$, on a

$$\begin{aligned} A_p B_q - A_q B_p &= \Sigma D^2 \Big[\left(a_n^q a_m^{\mu-1} - a_m^q a_n^{\mu-1} \right) \left(a_n^p a_\mu^\mu - a_m^p a_n^\mu \right) \\ & \qquad - \left(a_n^p a_m^{\mu-1} - a_m^p a_n^{\mu-1} \right) \left(a_n^q a_m^\mu - a_m^q a_n^\mu \right) \Big] \\ &= \Sigma D^2 \left(a_n^p a_m^q - a_m^p a_n^q \right) \left(a_n^\mu a_m^{\mu-1} - a_m^\mu a_n^{\mu-1} \right), \end{aligned}$$

comme il est facile de s'en convaincre. Cette dernière somme est le produit de deux déterminants, de sorte que l'on a encore l'égalité

$$A_p B_q - A_q B_p = \mathcal{D} \left[a_1^1 \ldots a_p^p \ldots a_q^q \ldots a_{\mu-2}^{\mu-2} \right] \mathcal{D} \left[a_1^1 \ldots a_p^\mu \ldots a_q^{\mu-1} \ldots a_{\mu-2}^{\mu-2} \right].$$

Ainsi les deux derniers termes de (14) peuvent s'écrire

$$C \, \Sigma \, \mathcal{D} \left[a_1^1 \ldots a_p^\mu \ldots a_q^{\mu-1} \ldots a_{\mu-2}^{\mu-2} \right] \left(a_{\mu-1}^p a_\mu^p - a_\mu^p a_{\mu-1}^q \right);$$

le second et le premier terme de la même égalité sont aussi

$$
\begin{aligned}
C\Big\{ & a^{\mu}_{\mu}\,\Sigma\, a^{p}_{\mu-1}\,\textcircled{D}\Big[a^{1}_{1}\ldots a^{p+1}_{p}\ldots a^{\mu-2}_{\mu-3}\,a^{\mu-1}_{\mu-2}\Big] \\
& + a^{\mu-1}_{\mu-1}\,\Sigma\, a^{p}_{\mu}\,\textcircled{D}\Big[a^{1}_{1}\ldots a^{p+1}_{p}\ldots a^{\mu-2}_{\mu-3}\,a^{\mu}_{\mu-2}\Big] \\
& - a^{\mu}_{\mu-1}\,\Sigma\, a^{p}_{\mu}\,\textcircled{D}\Big[a^{1}_{1}\ldots a^{p+1}_{p}\ldots a^{\mu-2}_{\mu-3}\,a^{\mu}_{\mu-2}\Big] \\
& - a^{\mu-1}_{\mu}\,\Sigma\, a^{p}_{\mu-1}\,\textcircled{D}\Big[a^{1}_{1}\ldots a^{p+1}_{q}\ldots a^{\mu-2}_{\mu-3}\,a^{\mu-1}_{\mu-2}\Big]\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
C\,\textcircled{D}\Big[a^{1}_{1}\ldots a^{\mu-2}_{\mu-2}\Big]\big(a^{\mu}_{\mu}.a^{\mu-1}_{\mu-1} - a^{\mu-1}_{\mu}\,a^{\mu}_{\mu-1}\big).
$$

Réunissant donc ces trois dernières quantités et faisant abstraction du facteur commun C, il est visible qu'elles représentent dans leur ensemble le déterminant d'ordre μ du deuxième membre de (14) développé par rapport au produit des deux éléments $a_{\mu-1}$ et a_{μ}; les indices p et q ne peuvent prendre en effet que les valeurs de 1 à $\mu - 2$. Il résulte de là que la proposition est démontrée.

Maintenant, pour déterminer dans la loi suprême l'opération caractérisée par Δ, tout en conservant une entière généralité, il faut observer, avec Wronski, que les différences sont les premiers éléments des fonctions, puisqu'elles caractérisent l'élément primitif de la sommation dans la génération des fonctions; si donc l'opération désignée par Δ représente une différence, les formules précédentes conviendront généralement à tous les cas; c'est pour cela que nous avons indiqué une opération quelconque par la caractéristique Δ.

Mais, parmi les différences, les différentielles ont un caractère spécial qui permet de les utiliser dans la plupart des cas et d'opérer de notables simplifications dans les calculs : il nous suffira donc de démontrer les relations suivantes pour les différentielles seulement, en avertissant qu'elles subsistent encore pour les différences.

En supposant que nous prenions les différentielles des fonctions $F(x)$ et Ω par rapport à la variable x, la quantité (3) devient

$$
(15) \qquad X_{\mu}(\theta) = \textcircled{D}[d^{1}\Omega_{1}\,d^{2}\Omega_{2}\ldots d^{\mu-1}\Omega_{\mu-1}\,d^{\mu}\theta] \quad [1],
$$

---

[1] Le professeur Th. Muir (*loc. cit.*) donne à ce déterminant le nom de *Wronskien*. Les Wronskiens, dit-il, furent d'abord employés par Wronski, auteur d'un théorème général bien connu relatif à ces fonctions; après avoir été oubliés pendant soixante ans, ils furent de nouveau mis en évidence par les recherches de Christoffle et de Fröbenius, auxquels nous sommes principalement redevables de la découverte de leurs propriétés. On a été si longtemps avant de reconnaître l'identité des fonctions de Wronski et des déterminants, qu'il me paraît à propos de leur donner le nom de leur auteur, et je pense que les mathématiciens seront heureux d'adopter la dénomination que je me suis hasardé à proposer.

et, si nous en prenons la différentielle, nous avons

$$\begin{aligned} d\mathfrak{D}[d^1\Omega_1 \ldots d^{\mu-1}\Omega_{\mu-1}\, d^\mu\Theta] &= \Sigma\, d^{\mu+1}\Omega_p\, \mathfrak{D}[d^1\Omega_1 \ldots d^p\Omega_{p+1} \ldots d^{\mu-2}\Omega_{\mu-1}\, d^{\mu-1}\Theta] \\ &+ \Sigma\, d^\mu\Omega_p\, d\mathfrak{D}[d^1\Omega_1 \ldots d^p\Omega_{p+1} \ldots d^{\mu-2}\Omega_{\mu-1}\, d^{\mu-1}\Theta]. \end{aligned}$$

La seconde somme est nulle parce qu'elle est formée de déterminants ayant toujours deux suites d'éléments ayant même ordre de différentielles; il faut aussi considérer la fonction Θ comme étant la fonction Ω_μ, ce qui peut être, puisque toutes les fonctions $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ sont indépendantes. On a donc

$$(15)' \qquad dX_\mu(\Theta) = \mathfrak{D}[d^1\Omega_1\, d^2\Omega_2 \ldots d^{\mu-1}\Omega_{\mu-1}\, d^{\mu+1}\Theta].$$

D'autre part, mettant $\mu - 1$ pour μ, puis $\Omega_{\mu-1}$ pour Θ, nous avons, d'après (15)', les fonctions

$$dX_{\mu-1}(\Theta) \quad \text{et} \quad dX_{\mu-1}(\Omega_{\mu-1});$$

le théorème (13) donne alors, en remplaçant les indices supérieurs par des ordres de différentiation,

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_\mu(\Theta)\, X_{\mu-2}(\Omega_{\mu-2}) &= X_{\mu-1}(\Omega_{\mu-1})\, dX_{\mu-1}(\Theta) - X_{\mu-1}(\Theta)\, dX_{\mu-1}(\Omega_{\mu-1}) \\ &= [X_{\mu-1}(\Omega_{\mu-1})]^2\, d\frac{X_{\mu-1}(\Theta)}{X_{\mu-1}(\Omega_{\mu-1})}; \end{aligned} \right.$$

par suite, il vient, en faisant $\Theta = \Omega_\omega$, puis $\Theta = \Omega_\mu$,

$$(17) \qquad \Phi_\mu(\omega) = \frac{X_\mu(\Omega_\omega)}{X_\mu(\Omega_\mu)} = \frac{d\dfrac{X_{\mu-1}(\Omega_\omega)}{X_{\mu-1}(\Omega_{\mu-1})}}{d\dfrac{X_{\mu-1}(\Omega_\mu)}{X_{\mu-1}(\Omega_{\mu-1})}} = \frac{d\Phi_{\mu-1}(\omega)}{d\Phi_{\mu-1}(\mu)},$$

et en faisant $\Theta = Fx$, on a de même

$$(17)' \qquad \Xi_\mu = \frac{X_\mu(Fx)}{X_\mu(\Omega_\mu)} = \frac{d\Xi_{\mu-1}}{d\Phi_{\mu-1}(\mu)}.$$

On aurait aussi, comme nous l'avons seulement énoncé ([1]),

$$(18) \qquad \Phi_\mu(\omega) = \frac{\Delta\Phi_{\mu-1}(\omega)}{\Delta\Phi_{\mu-1}(\mu)}, \quad \Xi_\mu = \frac{\Delta\Xi_{\mu-1}}{\Delta\Phi_{\mu-1}(\mu)}.$$

([1]) La démonstration de ces relations est semblable à celle que nous venons de donner pour les différentielles, avec cette modification que la différence d'un déterminant, tel que (3), se compose de μ termes analogues à (15)', au lieu d'un seul; le théorème (13) s'applique ensuite à chacun des μ termes de la différence et à leur somme, comme il est facile de le voir.

Remarque. — En terminant la démonstration de la loi suprême, il est utile d'indiquer les raisons qui nous ont fait préférer la marche que nous venons de suivre à celle que donne Wronski dans la première section de la *Philosophie de la Technie*.

Notre premier soin a été de faire usage de transformations connues pour faciliter cette démonstration : de cette manière, nous avons pu arriver assez rapidement au résultat; mais l'avantage le plus important que nous en avons retiré a été de parvenir en même temps à établir ce résultat pour une opération quelconque caractérisée par la lettre Δ, tandis que Wronski ne considère d'abord que les différences des fonctions et il est ensuite obligé de procéder, au moyen des fonctions ∇, à la généralisation du premier résultat.

Le théorème (13) sur les déterminants joue le même rôle que celui qui est donné par Wronski comme introduction à la loi suprême, malgré leur différence essentielle : le premier porte sur les éléments quelconques d'un déterminant et le second sur les différences de certains éléments. Nous avons profité des travaux faits depuis plus d'un demi-siècle, tandis que Wronski avait eu tout à constituer pour réaliser sa conception d'une loi suprême.

Nous allons donner quelques exemples d'application immédiate de cette loi et indiquer comment on doit déterminer les fonctions Ω.

II. — Application de la loi suprême au développement des fonctions.

Développement d'une fonction suivant les puissances d'une autre fonction. — Supposons que, dans l'expression (10) de la loi suprême, les diverses fonctions Ω soient les diverses puissances d'une fonction φx, de sorte que l'on ait

$$\Omega_1 = \varphi x,\quad \Omega_2 = (\varphi x)^2,\quad \Omega_3 = (\varphi x)^3,\quad \ldots;$$

le développement de la fonction Fx sera (développement de Paoli)

$$Fx = A_0 + A_1\varphi x + A_2(\varphi x)^2 + A_3(\varphi x)^3 + \ldots. \tag{19}$$

Pour déterminer les coefficients, nous obtenons successivement, d'après (17),

$$\Phi_0(\omega) = (\varphi x)^\omega,$$

$$\Phi_1(\omega) = \frac{d\Phi_0(\omega)}{d\Phi_0(1)} = \omega(\varphi x)^{\omega-1},$$

$$\Phi_2(\omega) = \frac{d\Phi_1(\omega)}{d\Phi_1(2)} = \omega(\omega-1)(\varphi x)^{\omega-2},$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$(20) \qquad \Phi_\mu(\omega) = \frac{d\Phi_{\mu-1}(\omega)}{d\Phi_{\mu-1}(\mu)} = \frac{\omega^{\mu-1}}{1^{\mu|1}}(\varphi x)^{\omega-\mu}.$$

Ensuite, passant à la détermination successive des fonctions Ψ, d'après (9) ou (11), il vient

$$\Psi_1(\mu) = -\frac{\mu+1}{1}\varphi x,$$

$$\Psi_2(\mu) = +\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{1.2}(\varphi x)^2,$$

$$\Psi_3(\mu) = -\frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{1.2.3}(\varphi x)^3,$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\Psi_\nu(\mu) = (-1)^\nu \frac{(\mu+1)^{\nu|1}}{1^{\nu|1}}(\varphi x)^\nu = (-1)^\nu \frac{(\nu+1)^{\mu|1}}{1^{\mu|1}}(\varphi x)^\nu;$$

puis, substituant ces valeurs dans l'expression (8) ou (11) des coefficients A, en donnant à x une valeur quelconque, mais déterminée, w, on obtient

$$A_0 = \Xi_0 - \Xi_1\varphi w + \Xi_2(\varphi w)^2 - \Xi_3(\varphi w)^3 + \ldots,$$

$$A_1 = \Xi_1 - 2\Xi_2\varphi w + 3\Xi_3(\varphi w)^2 - 4\Xi_4(\varphi w)^3 + \ldots,$$

$$A_2 = \Xi_2 - 3\Xi_3\varphi w + 6\Xi_4(\varphi w)^2 - 10\Xi_5(\varphi w)^3 + \ldots,$$

ainsi de suite, et généralement

$$(21) \qquad A_\mu = \Xi_\mu - \frac{2^{\mu|1}}{1^{\mu|1}}\Xi_{\mu+1}\varphi w + \frac{3^{\mu|1}}{1^{\mu|1}}\Xi_{\mu+2}(\varphi w)^2 - \frac{4^{\mu|1}}{1^{\mu|1}}\Xi_{\mu+3}(\varphi w)^3 + \ldots.$$

Il reste à déterminer les quantités Ξ; pour cela, d'après (5) ou (11), on a

$$\Xi_\mu = \frac{\circledS[d\varphi w \ldots d^{\mu-1}(\varphi w)^{\mu-1} d^\mu F w]}{\circledS[d\varphi w \ldots d^{\mu-1}(\varphi w)^{\mu-1} d^\mu(\varphi w)^\mu]}.$$

Mais le dénominateur peut se simplifier; en effet, d'après (16), en faisant $\Theta = (\varphi w)^\mu$, on peut écrire

$$\frac{\circledS[d\varphi w \ldots d^\mu(\varphi w)^\mu]}{\circledS[d\varphi w \ldots d^{\mu-1}(\varphi w)^{\mu-1}]} = \frac{\circledS[d\varphi w \ldots d^{\mu-1}(\varphi w)^{\mu-1}]}{\circledS[d\varphi w \ldots d^{\mu-2}(\varphi w)^{\mu-2}]} \cdot d\frac{\circledS[d\varphi w \ldots d^{\mu-1}(\varphi w)^\mu]}{\circledS[d\varphi w \ldots d^{\mu-1}(\varphi w)^{\mu-1}]}.$$

Le second facteur du second membre n'est autre que

$$d\Phi_{\mu-1}(\mu) = \mu\, d\underset{\cdot}{\varphi}\varpi,$$

d'après (20), ce qui donne

$$\frac{\mathfrak{S}[d\underset{\cdot}{\varphi}\varpi \ldots d^{\mu}(\underset{\cdot}{\varphi}\varpi)^{\mu}]}{\mathfrak{S}[d\underset{\cdot}{\varphi}\varpi \ldots d^{\mu-1}(\underset{\cdot}{\varphi}\varpi)^{\mu-1}]} = \frac{\mathfrak{S}[d\underset{\cdot}{\varphi}\varpi \ldots d^{\mu-1}(\underset{\cdot}{\varphi}\varpi)^{\mu-1}]}{\mathfrak{S}[d\underset{\cdot}{\varphi}\varpi \ldots d^{\mu-2}(\underset{\cdot}{\varphi}\varpi)^{\mu-2}]}\,\mu\, d\underset{\cdot}{\varphi}\varpi.$$

Appliquant cette même relation aux indices inférieurs à μ et $\mu-1$ et substituant les valeurs ainsi calculées dans le premier facteur du second membre, on trouve

$$\frac{\mathfrak{S}[d\underset{\cdot}{\varphi}\varpi \ldots d^{\mu}(\underset{\cdot}{\varphi}\varpi)^{\mu}]}{\mathfrak{S}[d\underset{\cdot}{\varphi}\varpi \ldots d^{\mu-1}(\underset{\cdot}{\varphi}\varpi)^{\mu-1}]} = 1^{\mu|1}(d\underset{\cdot}{\varphi}\varpi)^{\mu}.$$

Cette dernière relation donne elle-même

$$\mathfrak{S}[d\underset{\cdot}{\varphi}\varpi \ldots d^{\mu}(\underset{\cdot}{\varphi}\varpi)^{\mu}] = \mathfrak{S}[d\underset{\cdot}{\varphi}\varpi \ldots d^{\mu-1}(\underset{\cdot}{\varphi}\varpi)^{\mu-1}]\,1^{\mu|1}(d\underset{\cdot}{\varphi}\varpi)^{\mu},$$

et, opérant comme précédemment, on en déduit

$$\mathfrak{S}[d\underset{\cdot}{\varphi}\varpi \ldots d^{\mu}(\underset{\cdot}{\varphi}\varpi)^{\mu}] = 1^{1|1}\,1^{2|1}\,1^{3|1} \ldots 1^{\mu|1}(d\underset{\cdot}{\varphi}\varpi)^{1+2+3+\cdots+\nu}.$$

Ainsi la quantité Ξ est définitivement

$$\Xi_{\mu} = \frac{\mathfrak{S}[d\underset{\cdot}{\varphi}\varpi \ldots d^{\mu-1}(\underset{\cdot}{\varphi}\varpi)^{\mu-1}\, d^{\mu}\mathrm{F}\varpi]}{1^{1|1}\,1^{2|1} \ldots 1^{\mu|1}(d\underset{\cdot}{\varphi}\varpi)^{1+2+\cdots+\mu}}. \tag{22}$$

On peut donc opérer le développement d'une fonction quelconque $\mathrm{F}x$ sous la forme (19), au moyen des expressions des coefficients (21) et (22), quelle que soit la valeur ϖ de x. Mais si, parmi ces valeurs, on prend celle qui annule la fonction $\underset{\cdot}{\varphi}x$, soit a cette valeur qui donne

$$\underset{\cdot}{\varphi}a = 0, \tag{23}$$

l'expression (21) se réduit à son premier terme, et l'on a, comme cela est connu, $\dot{x}$ désignant que l'on fait $x = a$ après avoir effectué les opérations,

$$\mathrm{F}x = \mathrm{F}\dot{x} + \frac{d\mathrm{F}\dot{x}}{d\underset{\cdot}{\varphi}\dot{x}}\underset{\cdot}{\varphi}x + \frac{\mathfrak{S}[d\underset{\cdot}{\varphi}\dot{x}\, d^2\mathrm{F}\dot{x}]}{1^{1|1}\,1^{2|1}(d\underset{\cdot}{\varphi}\dot{x})^3}(\underset{\cdot}{\varphi}x)^2 + \ldots;$$

on lève ainsi l'indétermination qui provient du choix de la quantité arbitraire ϖ.

Wronski fait à ce sujet une remarque importante : c'est que les valeurs des

coefficients (21) sont indépendantes de la quantité ϖ, c'est-à-dire que ces valeurs sont constantes, et, comme A_0 est d'une part égal à Fa, on a, pour ce même coefficient, d'après (21),

$$(24) \qquad Fa = F\varpi - \frac{dF\varpi}{d\varphi\varpi}\varphi\varpi + \frac{\mathfrak{D}[d\varphi\varpi\, d^2F\varpi]}{1^{1|1}\,1^{2|1}(d\varphi\varpi)^2}(\varphi\varpi)^2 - \ldots,$$

la quantité a étant astreinte à satisfaire à l'équation (23).

Telle est la démonstration que Wronski donne de l'expression fondamentale de la méthode secondaire élémentaire; en changeant a en y, on retrouve en effet l'expression (3) que nous avions donnée sans démonstration au commencement de cet Ouvrage et qui nous a servi de point de départ. Il existe d'autres démonstrations de cette expression : nous n'avons pas à nous y arrêter.

Développement d'une fonction suivant les facultés d'une autre fonction. — Dans ce qui précède, nous avons fait usage des différentielles, parce que la fonction Fx était développée suivant les puissances d'une fonction φx; si Fx était développée suivant les facultés de φx, il faudrait recourir aux différences. En effet, la $n^{\text{ième}}$ faculté de φx est

$$(\varphi x)^{n|\xi} = \varphi(x).\varphi(x+\xi)\,\varphi(x+2\xi)\ldots\varphi(x+\overline{n-1}\,\xi),$$

et ξ est la différence que l'on écrit ordinairement Δx; la différence de φx est alors

$$(25) \qquad \Delta\varphi x = \varphi(x+\xi) - \varphi(x)$$

ou encore

$$(25)' \qquad \Delta\varphi x = \varphi(x) - \varphi(x-\xi);$$

Wronski appelle la première *différence progressive*, et la seconde *différence régressive*. Il est souvent préférable de faire usage de cette dernière; par exemple, si a est la quantité qui annule φx, $\Delta^m(\varphi x)^{n|\xi}$ sera nul pour $x = a$ quand on aura $n > m$, parce que φa se trouvera en facteur, car on a, avec les différences régressives,

$$\Delta^m(\varphi x)^{n|\xi} = (\varphi x)^{n|\xi} - \frac{m}{1}[\varphi(x-\xi)]^{n|\xi} + \frac{m(m-1)}{1.2}[\varphi(x-2\xi)]^{n|\xi} - \ldots + (-1)^m[\varphi(x-m\xi)]^{n|\xi}.$$

Si donc on a le développement

$$(26)\qquad \mathrm{F}x = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1(\varphi x)^{1|\xi} + \mathrm{A}_2(\varphi x)^{2|\xi} + \mathrm{A}_3(\varphi x)^{3|\xi} + \ldots,$$

la relation (5) conduit, comme plus haut, à

$$\Phi_\mu(\omega) = \frac{\mathfrak{D}[\Delta^1(\varphi x)^{1|\xi}.\Delta^2(\varphi x)^{2|\xi}\ldots\Delta^\mu(\varphi x)^{\omega|\xi}]}{\mathfrak{D}[\Delta^1(\varphi x)^{1|\xi}.\Delta^2(\varphi x)^{2|\xi}\ldots\Delta^\mu(\varphi x)^{\mu|\xi}]},$$

et, comme $\omega > \mu$, en prenant après les opérations pour x la valeur a qui donne

$$(27)\qquad \varphi a = 0,$$

toutes les fonctions Φ sont nulles. Il en résulte que les fonctions Ψ, provenant de (9), sont nulles également, et les coefficients A, donnés par (8), se réduisent à leur premier terme

$$(28)\qquad \mathrm{A}_\mu = \frac{\mathfrak{D}[\Delta^1(\varphi\dot{x})^{1|\xi}\ldots\Delta^{\mu-1}(\varphi\dot{x})^{\mu-1|\xi}\Delta^\mu\mathrm{F}\dot{x}]}{\Delta(\varphi\dot{x})^{1|\xi}\ldots\Delta^{\mu-1}(\varphi\dot{x})^{\mu-1|\xi}\Delta^\mu(\varphi\dot{x})^{\mu|\xi}},$$

en faisant $x = a$ après les différentiations, comme cela est indiqué par $\dot{x}$. Le déterminant du dénominateur se réduit évidemment au produit indiqué.

Si l'on prenait les différences progressives, on aurait

$$\Delta^m(\varphi x)^{n|\xi} = \varphi(x+m\xi)^{n|\xi} - \frac{m}{1}[\varphi(a+\overline{m-1}\,\xi)]^{n|\xi} + \frac{m(m-1)}{1.2}[\varphi(x+\overline{m-2}\,\xi)]^{n|\xi} - \ldots + (-1)^m(\varphi x)^{n|\xi};$$

si $n > m$, $\varphi(x+m\xi)$ sera toujours en facteur commun, de sorte que, pour avoir un coefficient de la forme (28), eu égard à la condition (27), il faut, dans les équations de conditions (2), donner à la variable x les valeurs respectives a, $a-\xi$, $a-2\xi$, ... pour la première, la deuxième, la troisième condition, etc. Au lieu de (28), on aura ainsi, pour le coefficient général,

$$(29)\qquad \mathrm{A}_\mu = \frac{\mathfrak{D}\{\Delta[\varphi(\dot{x}-\xi)]^{1|\xi}.\Delta^2[\varphi(\dot{x}-2\xi)]^{2|\xi}\ldots\Delta^\mu\mathrm{F}\dot{x}\}}{\Delta[\varphi(\dot{x}-\xi)]^{1|\xi}\Delta^2[\varphi(\dot{x}-2\xi)]^{2|\xi}\ldots\Delta^\mu[\varphi(\dot{x}-\mu\xi)^{\mu|\xi}]}.$$

Que l'on considère l'expression (28) ou (29), si la différence ξ de x se réduit à dx, les différences Δ devenant des différentielles d, on retombe sur (22), en changeant ϖ en a après les opérations.

Théorèmes. — Quelle que soit x, les relations (17) conduisent à

$$\Xi_1 = \frac{d\,\mathrm{F}x}{d\,\varphi x}, \quad \Xi_2 = \frac{1}{1^{2|1}} \frac{d}{d\,\varphi x}\left(\frac{d\,\mathrm{F}x}{d\,\varphi x}\right), \quad \Xi_3 = \frac{1}{1^{3|1}} \frac{d}{d\,\varphi x}\left[\frac{d}{d\,\varphi x}\left(\frac{d\,\mathrm{F}x}{d\,\varphi x}\right)\right],$$

et, continuant ainsi, on a pour Ξ_μ, en tenant compte de (22) et en remplaçant w par x,

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{1^{\mu|1}} \frac{d}{d\,\varphi x}\left(\frac{d}{d\,\varphi x}\left(\cdots\left(\frac{d}{d\,\varphi x}\left(\frac{d\,\mathrm{F}x}{d\,\varphi x}\right)\right)\cdots\right)\right) \\ &\quad = \frac{\mathfrak{D}[d^1 \varphi x\, d^2 (\varphi x)^2 \ldots d^{\mu-1} (\varphi x)^{\mu-1}\, d^\mu \mathrm{F}x]}{1^{1|1}\, 1^{2|1} \ldots 1^{\mu|1} (d\,\varphi x)^{1+2+\cdots+\mu}}, \end{aligned} \right.$$

relation donnée par Wronski; les différentiations indiquées dans le premier membre de cette égalité se trouvent effectuées dans le second.

L'expression du premier membre peut encore prendre une autre forme quand on tient compte de la relation (23), en faisant $x = a$ après les différentiations. On a, en effet,

$$\frac{d\,\mathrm{F}x}{d\,\varphi x} = \frac{d\,\mathrm{F}x}{dx} \frac{dx}{d\,\varphi x};$$

la fonction φx s'annulant pour $x = a$, on peut poser

$$(31)\qquad \varphi x = (x - a)\,\theta x,$$

$\theta \dot{x}$ étant une certaine fonction de x qui ne s'annule pas pour $x = a$, ce qui donne

$$\frac{d\,\varphi \dot{x}}{dx} = \theta a,$$

et il vient

$$(32)\qquad \frac{d\,\mathrm{F}\dot{x}}{d\,\varphi \dot{x}} = \frac{d\,\mathrm{F}a}{da} \frac{1}{\theta a}.$$

Ensuite, on a

$$\frac{d}{d\,\varphi x}\left(\frac{d\,\mathrm{F}x}{dx} \frac{1}{\theta x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\,\mathrm{F}x}{d\,\varphi x} \frac{1}{\theta x}\right),$$

comme on peut le vérifier, d'où l'on tire, d'après (32),

$$\frac{d}{d\,\varphi \dot{x}}\left(\frac{d\,\mathrm{F}\dot{x}}{dx} \frac{1}{\theta \dot{x}}\right) = \frac{d}{da}\left[\frac{d\,\mathrm{F}a}{da} \frac{1}{(\theta a)^2}\right].$$

Différentiant encore cette expression, on a également

$$\frac{d}{d\,\varphi \dot{x}}\left\{\frac{d}{dx}\left[\frac{d\,\mathrm{F}\dot{x}}{dx} \frac{1}{(\theta \dot{x})^2}\right]\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{d\,\varphi \dot{x}}\left[\frac{d\,\mathrm{F}\dot{x}}{dx} \frac{1}{(\theta \dot{x})^2}\right]\right\} = \frac{d^2}{da^2}\left[\frac{d\,\mathrm{F}a}{da} \frac{1}{(\theta a)^3}\right],$$

d'après l'expression précédente. Continuant ainsi, on verrait aisément que l'on a pour le coefficient A_μ de (19), en supposant la condition (23), pour que A_μ se réduise à Ξ_μ,

$$(33)\qquad \frac{1}{1^{\mu|1}}\,\frac{d^{\mu-1}}{da^{\mu-1}}\left[\frac{d\,\mathrm{F}a}{da}\,\frac{1}{(\theta a)^{\mu}}\right]=\frac{\circledS\left[\dfrac{d\,\varphi\dot{x}}{dx}\;\dfrac{d^2(\varphi\dot{x})^2}{dx^2}\cdots\dfrac{d^{\mu}\,\mathrm{F}\dot{x}}{dx^{\mu}}\right]}{1^{1|1}.\,1^{2|1}\ldots 1^{\mu|1}\left(\dfrac{d\,\varphi\dot{x}}{dx}\right)^{1+2+\cdots+\mu}},$$

d'après (22) et (30), et en prenant les dérivées au lieu des différentielles dans le second membre.

De cette égalité on peut tirer une autre relation importante qui va nous servir. Faisons

$$\varphi x=\frac{fx}{\psi x},$$

la fonction fx s'annulant pour $x=a$, on pourra poser, comme plus haut,

$$\frac{fx}{\psi x}=(x-a)\frac{\theta x}{\psi x},$$

et l'on aura

$$(33)'\qquad \frac{d^{\mu-1}}{dx^{\mu-1}}\left[\frac{d\,\mathrm{F}x}{dx}\left(\frac{\psi x}{\theta x}\right)^{\mu}\right]=\frac{d^{\mu-1}}{dx^{\mu-1}}\left[\frac{d\,\mathrm{F}x}{dx}(\psi x)^{\mu}\frac{1}{(\theta x)^{\mu}}\right];$$

par suite (33), conduit immédiatement à la relation suivante :

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{\circledS\left[\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f\dot{x}}{\psi\dot{x}}\right)\;\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{f\dot{x}}{\psi\dot{x}}\right)^2\cdots\dfrac{d^{\mu-1}}{dx^{\mu-1}}\left(\dfrac{f\dot{x}}{\psi\dot{x}}\right)^{\mu-1}\;\dfrac{d^{\mu-1}}{dx^{\mu-1}}\left(\dfrac{d\,\mathrm{F}\dot{x}}{dx}\right)\right]}{1^{1|1}\,1^{2|1}\ldots 1^{\mu|1}\left[\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f\dot{x}}{\psi\dot{x}}\right)\right]^{1+2+\cdots+\mu}}\\&=\frac{\circledS\left\{\dfrac{df\dot{x}}{dx}\;\dfrac{d^2(f\dot{x})^2}{dx^2}\cdots\dfrac{d^{\mu-1}(f\dot{x})^{\mu-1}}{dx^{\mu-1}}\;\dfrac{d^{\mu-1}}{dx^{\mu-1}}\left[\dfrac{d\,\mathrm{F}\dot{x}}{dx}(\psi\dot{x})^{\mu}\right]\right\}}{1^{1|1}\,1^{2|1}\ldots 1^{\mu|1}\left(\dfrac{df\dot{x}}{dx}\right)^{1+2+\cdots+\mu}}.\end{aligned}\right.$$

Démonstration de la formule du problème universel. — Le théorème précédent permet de donner rapidement la solution du problème universel de Wronski, problème qui est la base de la méthode secondaire systématique.

Ce géomètre considère que toute équation algébrique ou transcendante, primitive ou différentielle, peut se ramener à la forme suivante, soit par un développement en série, soit autrement,

$$(35)\qquad 0=fx+x_1f_1x_1+x_2f_2x+x_3f_3x+\ldots,$$

x est la quantité inconnue, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sont des quantités indépendantes de x par rapport aux puissances desquelles on doit développer la quantité x, ou une fonction quelconque déterminée de x, Fx; $f_1, f_2, f_3, \ldots$ sont des fonctions quelconques de x, et la fonction f est choisie de telle sorte que l'on puisse déterminer une quantité a qui donne

$$(36) \qquad fa = 0.$$

Pour résoudre l'équation (35) par rapport à x, ou plutôt pour trouver l'expression d'une quantité Fx dépendant de (35), nous considérerons pour commencer l'ensemble de tous les termes à partir du second : nous ferons donc

$$(36)' \qquad x_1 f_1 x + x_2 f_2 x + x_3 f_3 x + \ldots = x_1 \psi x;$$

de la sorte l'équation (35) s'écrira

$$(37) \qquad 0 = fx + x_1 \psi x,$$

et nous aurons à développer Fx suivant les puissances de x_1,

$$Fx = A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_1^2 + A_3 x_1^3 + \ldots.$$

Remplaçons x_1 par sa valeur tirée de (37)

$$x_1 = -\frac{fx}{\psi x},$$

et considérons la valeur a de x qui annule fx : le coefficient général A_μ sera donné par l'expression qui forme le premier membre de (34), ou par celle du second membre qui lui est identique. Écrivant donc cette expression en prenant les différentielles au lieu des dérivées, nous avons, en tenant compte du signe de x_1^μ,

$$(38) \qquad A_\mu = (-1)^\mu \frac{\circledS \{ d^1 f\dot{x} . d^2 (f\dot{x}) \ldots d^{\mu-1} (f\dot{x})^{\mu-1} d^{\mu-1} [d F\dot{x} (\psi\dot{x})^\mu] \}}{1^{1|1} 1^{2|1} \ldots 1^{\mu|1} (d f\dot{x})^{1+2+\ldots+\mu}}.$$

Il reste à développer les puissances de ψx pour faire ressortir les quantités $x_2, x_3, \ldots$ et ordonner le développement de Fx par rapport à leurs puissances; or, si nous formons la puissance μ de ψx, quel que soit le nombre

de termes, nous avons, comme il est facile de le voir,

$$(\psi x)^\mu = \sum \frac{1^{\mu|1}}{1^{\alpha|1}\,1^{\beta|1}\,1^{\gamma|1}\ldots}\left(\frac{x_1}{x_1}f_1 x\right)^\alpha \left(\frac{x_2}{x_1}f_2 x\right)^\beta \left(\frac{x_3}{x_1}f_3 x\right)^\gamma \ldots,$$

en faisant, pour les exposants entiers, positifs ou nuls,

$$\mu = \alpha + \beta + \gamma + \ldots;$$

la différentielle du dernier terme du déterminant est alors

$$\begin{aligned} &d^{\mu-1}[d\,\mathrm{F}x\,(\psi x)^\mu] \\ &= \sum \frac{1^{\mu|1}}{1^{\alpha|1}\,1^{\beta|1}\,1^{\gamma|1}\ldots 1^{\mu|1}}\left(\frac{x_1}{x_1}\right)^\alpha \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^\beta \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^\gamma \ldots d^{\mu-1}[d\,\mathrm{F}x\,(f_1 x)^\alpha (f_2 x)^\beta (f_3 x)^\gamma \ldots]. \end{aligned}$$

Maintenant nous pouvons développer le déterminant de (38) par rapport aux sommes qui composent son dernier terme et ordonner par rapport aux puissances de x_1, x_2, x_3, ..., de sorte que la fonction $\mathrm{F}x$ aura elle-même une expression de la forme

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{F}x = \Xi_0(0) &+ \Xi_1(1_1)\frac{x_1}{1} + \Xi_2(1_2)\frac{x_1^2}{1.2} + \Xi_3(1_3)\frac{x_1^3}{1.2.3} + \ldots \\ &+ \Xi_1(2_1)\frac{x_2}{1} + \Xi_2(1_1, 2_1)\frac{x_1 x_2}{1.2} + \Xi_3(1_2, 2_1)\frac{x_1^2 x_2}{1.2.1} + \ldots \\ &+ \Xi_1(3_1)\frac{x_3}{1} + \Xi_2(2_2)\frac{x_2^2}{1.2} + \Xi_3(1_1, 2_2)\frac{x_1 x_2^2}{1.1.2} + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Le terme général est

$$(39)' \qquad \Xi_\mu(1_\alpha, 2_\beta, 3_\gamma, \ldots)\frac{x_1^\alpha . x_2^\beta . x_3^\gamma \ldots}{1^{\alpha|1}\,1^{\beta|1}\,1^{\gamma|1}\ldots},$$

avec

$$\mu = \alpha + \beta + \gamma + \ldots,$$

et le coefficient est, d'après ce qui précède,

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} &\Xi_\mu(1_\alpha, 2_\beta, 3_\gamma, \ldots) \\ &= (-1)^\mu \frac{\textcircled{D}\{d\,f\dot{x} . d^2(f\dot{x})^2 \ldots d^{\mu-1}(f\dot{x})^{\mu-1} . d^{\mu-1}[d\,\mathrm{F}x(f_1 x)^\alpha (f_2 x)^\beta (f_3 x)^\gamma \ldots]\}}{1^{1|1}\,1^{2|1}\ldots 1^{\mu-1|1}(d\,f x)^{1+2+\ldots+\mu}}, \end{aligned}\right.$$

en donnant à x la valeur a après les différentiations.

On a, comme valeurs particulières des premiers coefficients,

$$\Xi_0(0) = \mathrm{F}a, \quad \Xi_1(\rho) = -\frac{d\,\mathrm{F}\dot{x}_\rho . f\dot{x}}{d\,f x},$$

$$\Xi_2(\rho_1, \sigma_1) = \frac{\textcircled{D}\{d\,f\dot{x}\,d[d\,\mathrm{F}\dot{x}\,(f_\rho \dot{x})(f_\sigma \dot{x})]\}}{(d\,f\dot{x})^3}, \quad \ldots$$

L'expression (39) contient comme cas particulier la formule de Lagrange pour le développement de l'inconnue x provenant de la relation

$$0 = x - a + x_1 f_1 x.$$

Wronski a donné la résolution de l'équation (35), dans sa *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques;* il l'a reproduite avec des considérations relatives à la nature de cette équation et à la forme de la solution (39) dans la première Section de la *Philosophie de la Technie,* puis il a donné la démonstration de l'expression (40) dans le tome III de la *Réforme,* page cx, ainsi que dans le tome II (même page). Celle que nous venons de présenter est au fond la même que celle de Wronski, bien qu'elle en diffère par le mode d'exposition. M. Cayley, dans le *Quarterly Journal of pure and applied Mathematics,* avril 1873, a également démontré l'expression (39), mais il ne semble regarder la question que comme un simple exercice de calcul. Ce géomètre, dans sa démonstration, fait usage d'un procédé employé par Jacobi et par Murphy ([1]).

Nous ne pouvons nous arrêter davantage au Problème universel de Wronski; cette question est le point de départ de la méthode secondaire systématique et elle a une grande analogie avec celle que nous avons donnée, quoiqu'elle présente une différence essentielle dans le développement de la fonction.

De la méthode suprême. — Pour montrer encore une application importante de la loi suprême, nous allons indiquer la manière dont Wronski détermine les fonctions Ω.

Supposons, en premier lieu, que l'on développe la fonction Fx sous la forme

$$(41) \qquad \mathrm{F}x = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 \Omega_1 + \mathrm{A}_2(\varphi x)^2 + \mathrm{A}_3(\varphi x)^3 + \ldots,$$

([1]) On peut se faire une idée du genre de démonstration employée par M. Cayley d'après la démonstration de la formule de Lagrange reproduite par M. Bertrand dans son *Traité de Calcul différentiel et intégral,* t. I, p. 317 à 319. M. Cayley remarque que l'expression (40) est équivalente à (33)′, mais il est facile de voir que cette dernière ne peut être utilisée dans la méthode secondaire, puisque l'équation (35) ne peut en général être remplacée par l'équation (37) dans les applications. C'est précisément quand on ne veut tenir compte que de l'ensemble des termes (36)′, et non de ces termes mêmes, que l'on a recours à la méthode secondaire élémentaire dont l'expression fondamentale est (24). Il est encore facile de se rendre compte que le principe de la démonstration de la formule de Lagrange est le même que celui de la formule de Wronski : c'est ce qui fait que l'on peut passer de la première à la seconde, bien que la formule de Lagrange soit contenue comme cas particulier dans celle de Wronski.

la fonction Ω_1 devant être déterminée de manière à satisfaire le mieux possible aux conditions du problème proposé; on obtiendra les coefficients au moyen des formules (11) en prenant pour valeur particulière de x celle qui annule la fonction φx; soit a cette valeur de x.

On trouverait très facilement, par l'application des formules (11),

$$(42)\qquad Fx = [\Xi_0 + \Psi_1(0)\Xi_1] + \Xi_1\Omega_1 + (\varphi x)^2[\Xi_2 + \Xi_3\varphi x + \Xi_4(\varphi x)^2 + \ldots].$$

Or, si la fonction Ω_1 est convenablement déterminée, la série

$$(43)\qquad \Xi_2 + \Xi_3\varphi x + \Xi_4(\varphi x)^2 + \Xi_5(\varphi x)^3 + \ldots$$

aura une valeur minima et cette valeur dépendra de la valeur absolue des coefficients Ξ, puisque la fonction φx doit être choisie de manière à rendre la série (43) convergente entre des limites que l'on aura fixées; en conséquence, il faudra tâcher de satisfaire le mieux possible à la condition

$$\Xi_2 = 0,$$

c'est-à-dire à

$$(44)\qquad d\Omega_1\, d^2 Fx - d^2\Omega_1\, d\, Fx = 0.$$

En effet, le numérateur du coefficient général Ξ_μ, d'après (5), peut se mettre sous la forme

$$\Sigma \pm \text{Ⓓ}[d^\alpha\Omega_1\, d^\beta Fx]\,\text{Ⓓ}[d^\gamma(\varphi x)^2 \ldots d^\varsigma(\varphi x)^{\mu-1}],$$

les indices $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varsigma$ prenant les valeurs de 1 à μ; comme la fonction Ω_1 est prise se rapprochant autant que possible de Fx, le premier déterminant sous le signe Σ est aussi petit que possible et la somme Σ, ou le coefficient Ξ_μ, est elle-même aussi petite que possible.

On voit par cela même que l'équation (44) ne peut être intégrée rigoureusement, puisque l'on aurait autrement $\Omega_1 = Fx$: les coefficients $\Xi_2, \Xi_3, \ldots$ seraient eux-mêmes nuls; de plus on aurait aussi $\Xi_0 = Fx$, $\Xi_1 = 1$ et $\Psi_1(0) = -Fx$, pour $x = a$, et le développement (42) se réduirait à l'identité $Fx = Fx$.

La fonction Ω_1 étant ainsi déterminée le mieux qu'il est possible de faire, on peut, en second lieu, considérer le développement

$$(45)\qquad Fx = A_0 + A_1\Omega_1 + A_2\Omega_2 + A_3(\varphi x)^3 + A_4(\varphi x)^4 + \ldots$$

et chercher de même à déterminer la fonction Ω_2 le mieux possible. Pour cela

on trouve encore, d'après (11),

$$(46)\quad \begin{cases} Fx = [\Xi_0 + \Psi_1(0)\Xi_1 + \Psi_2(0)\Xi_2] \\ \qquad + [\Xi_1 + \Psi_1(1)\Xi_2]\Omega_1 + \Xi_2\Omega_2 + (\varphi x)^3[\Xi_3 + \Xi_4\,\varphi x + \Xi_5(\varphi x)^2 + \ldots], \end{cases}$$

et, de même que plus haut, il faut que la série complémentaire ait la plus petite valeur possible, ce qui a lieu si l'on a

$$\Xi_3 = 0$$

ou si

$$(47)\qquad \mathfrak{D}[d\Omega_1\, d^2\Omega_2\, d^3 Fx] = 0.$$

Mais cette condition ne peut être remplie exactement, et Ω_2 doit être différent de Ω_1; il faut aussi que Ξ_3 soit plus petit que Ξ_2, afin que la valeur de la série complémentaire, soit plus petite que celle de la série précédente (43), pour des valeurs de la variable comprise entre les limites fixées.

La fonction Ω_2 étant déterminée, on continuerait de proche en proche à déterminer les fonctions suivantes de la même manière, et l'on trouverait pour développement, $\dot{\Omega}$ indiquant que l'on fait $x = a$ dans la fonction Ω,

$$(48)\quad \begin{cases} Fx = Fa + [\Xi_1 + \Psi_1(1)\Xi_2 + \Psi_2(1)\Xi_3 + \ldots + \Psi_{\mu-1}(1)\Xi_\mu](\Omega_1 - \dot{\Omega}_1) \\ \qquad + [\Xi_2 + \Psi_1(2)\Xi_3 + \Psi_2(2)\Xi_4 + \ldots + \Psi_{\mu-2}(2)\Xi_\mu](\Omega_2 - \dot{\Omega}_2) \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad + [\Xi_{\mu-1} + \Psi_1(\mu-1)\Xi_\mu](\Omega_{\mu-1} - \dot{\Omega}_{\mu-1}) \\ \qquad + \Xi_\mu(\Omega_\mu - \dot{\Omega}_\mu) \\ \qquad + (\varphi x)^{\mu+1}[\Xi_{\mu+1} + \Xi_{\mu+2}\,\varphi x + \Xi_{\mu+2}(\varphi x)^2 + \ldots], \end{cases}$$

la condition à laquelle il faut satisfaire le mieux possible pour déterminer la fonction Ω_μ étant généralement

$$(49)\qquad \mathfrak{D}[d^1\Omega_1\, d^2\Omega_2 \ldots d^\mu\Omega_\mu\, d^{\mu+1} Fx] = 0.$$

On remarquera que le développement (48) de la fonction Fx contient les différentielles de cette fonction : celles-ci doivent en effet être données par la nature même de la question, comme cela a lieu généralement. Cependant, si le problème comportait des différences au lieu de différentielles, il faudrait développer la fonction Fx suivant la forme

$$(50)\quad Fx = A_0 + A_1\Omega_1 + A_2\Omega_2 + \ldots + A_\mu\Omega_\mu + A_{\mu+1}\,\varphi x^{\mu+1|\xi} + A_{\mu+2}\,\varphi x^{\mu+2|\xi} + \ldots,$$

ξ est l'accroissement de x désigné ordinairement par Δx; ou encore, en rem-

plaçant les coefficients par leurs valeurs,

$$(50)' \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{F}x = \mathrm{F}a &+ [\Xi_1 + \Psi_1(1)\Xi_2 + \ldots + \Psi_{\mu-1}(1)\Xi_\mu](\Omega_1 - \dot{\Omega}_1) + \ldots \\ &+ [\Xi_{\mu-1} + \Psi_1(\mu-1)\Xi_\mu](\Omega_{\mu-1} - \dot{\Omega}_{\mu-1}) + \Xi_\mu(\Omega_\mu - \dot{\Omega}_\mu) \\ &+ (\varphi x)^{\mu+1|\xi}[\Xi_{\mu+1} + \Xi_{\mu+2}\varphi(x + \overline{\mu+1}\,\xi)^{1|\xi} \\ &\qquad + \Xi_{\mu+3}\varphi(x + \overline{\mu+2}\,\xi)^{2|\xi} + \Xi_{\mu+4}\varphi(\overline{\mu+3}\,\xi)^{3|\xi} + \ldots], \end{aligned} \right.$$

et la condition (49) serait remplacée par

$$(51) \qquad \mathfrak{G}[\Delta\Omega_1 . \Delta^2\Omega_2 \ldots \Delta^\mu\Omega_\mu \Delta^{\mu+1}\mathrm{F}x] = 0.$$

Les différences Δ sont ici des différences régressives; en tâchant de satisfaire le mieux possible à cette condition, on pourra déterminer la fonction Ω_μ.

Maintenant il reste à montrer comment on peut arriver à obtenir définitivement les fonctions Ω, d'après les conditions précédentes : c'est là l'objet spécial de la méthode suprême.

Considérons, pour commencer, la série suivante :

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{F}x = \mathrm{A}_0 &+ \mathrm{A}_1 \frac{x-a}{n_1+x} \\ &+ \mathrm{A}_2 \frac{(x-a)^2}{(n_1+x)(n_2+x)} + \mathrm{A}_3 \frac{(x-a)^3}{(n_1+x)(n_2+x)(n_3+x)} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

dans laquelle a, n_1, n_2, n_3, ... sont des constantes à déterminer. Wronski a étudié cette série, qui est propre à représenter généralement une fonction quelconque en restant très convergente : il suffit d'ailleurs d'examiner sa forme pour s'en rendre compte.

On trouverait facilement, d'après les formules (11), que le coefficient général est

$$(53) \quad \mathrm{A}_\mu = (n_\mu + a)\left(\frac{d\,\mathrm{F}a}{da} + \frac{\mathrm{H}_1}{1^{2|1}} \frac{d^2\,\mathrm{F}a}{da^2} + \frac{\mathrm{H}_2}{1^{3|1}} \frac{d^3\,\mathrm{F}a}{da^3} + \ldots + \frac{\mathrm{H}_{\mu-1}}{1^{\mu|1}} \frac{d^\mu\,\mathrm{F}a}{da^\mu} \right);$$

H_1, H_2, H_3, ..., $\mathrm{H}_{\mu-1}$ représentent respectivement : la somme des quantités n_1, n_2, ..., $n_{\mu-1}$, la somme de leurs produits 2 à 2, la somme de leurs produits 3 à 3, ..., le produit de ces $\mu - 1$ quantités. On peut donc se proposer de déterminer les quantités n_1, n_2, n_3, ... qui satisfont aux conditions (44), (47) et (49); on fera ainsi

$$(54) \qquad \Omega_\mu = \frac{(x-a)^\mu}{(n_1+x)(n_2+x)\ldots(n_\mu+x)},$$

et la condition (49) permettra de déterminer la quantité n_μ en supposant connues les quantités précédentes.

Ainsi, en substituant la première fonction

$$\Omega_1 = \frac{x-a}{n_1+x}$$

dans la relation (44), on a

$$d\Omega_1 = \frac{n_1+a}{(n_1+x)^2}\,dx, \quad d^2\Omega_1 = -\frac{2(n_1+a)}{(n_1+x)^3}\,dx^2,$$

puis

$$\tfrac{1}{2}(n_1+x)\frac{d^2\,\mathrm{F}x}{dx^2} + \frac{d\,\mathrm{F}x}{dx} = 0,$$

équation d'où l'on tire n_1. Cette quantité permet de calculer le coefficient

$$\mathrm{A}_1 = (n_1+a)\frac{d\,\mathrm{F}a}{da},$$

et d'obtenir alors le développement ($\alpha\alpha$) (*Digression sur les séries*) que Wronski nomme premier *progrès* de la génération de la fonction Fx.

Si l'on fait ensuite

$$\Omega_2 = \frac{(x-a)^2}{(n_1+x)(n_2+x)},$$

en substituant cette valeur de Ω_2 dans (47), on pourra calculer n_2 et obtenir le second *progrès*. On peut donc déterminer de mieux en mieux la fonction proposée en continuant de la même manière ([1]).

Wronski désigne cette méthode sous le nom de *méthode primordiale* ou *méthode suprême* élémentaire; il l'a développée dans le tome I de la *Réforme*, pages 265 à 345; puis il a donné les expressions calculées des trois premiers progrès dans l'Épitre à l'empereur de Russie ([2]).

Dans la méthode que Wronski nomme spécialement *méthode suprême*, on opère l'intégration des équations de condition (44), (47) et (49) comme nous l'avons fait pour les équations réduites dans la méthode secondaire, c'est-à-dire que, dans l'équation (49), ou (51), qui est linéaire par rapport aux différentielles, ou aux différences, de Ω_μ, on remplace les coefficients va-

---

([1]) La détermination des quantités n n'entraîne pas à la résolution d'équations algébriques, mais conduit à un calcul de fonctions symétriques.

([2]) On trouve également ces trois progrès dans l'*Encyclopédie mathématique* de Montferrier, t. III. On pourra consulter cet Ouvrage à défaut de ceux de Wronski, en faisant attention cependant aux nombreuses erreurs qu'il renferme.

riables par leurs valeurs moyennes en substituant aux différentielles des fonctions $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{\mu-1}$, Fx leurs propres valeurs moyennes entre les limites correspondantes à celles que l'on considère pour la variable x. On a donc à intégrer une équation d'ordre $\mu+1$ linéaire et à coefficients constants de la forme

$$A_{\mu+1} d^{\mu+1}\Omega_\mu + A_\mu d^\mu \Omega_\mu + \ldots + A_1 d\Omega_\mu = 0,$$

pour déterminer la fonction Ω_μ, en supposant les fonctions précédentes Ω_1, $\Omega_2, \ldots, \Omega_{\mu-1}$ déjà connues.

La solution de cette équation est

$$(55) \qquad \Omega_\mu = M_1 e^{m_1 x} + M_2 e^{m_2 x} + \ldots + M_{\mu+1} e^{m_{\mu+1} x};$$

$m_1, m_2, \ldots, m_{\mu+1}$ sont les racines de l'équation caractéristique, seulement il faut remarquer que l'une d'elles, $m_{\mu+1}$ par exemple, est toujours nulle, de sorte que le dernier terme se réduit à une constante que l'on peut négliger, puisque, d'après (48), on considère la différence $\Omega - \dot{\Omega}$ où cette constante n'entre plus. Cependant on peut laisser subsister le dernier terme en question en mettant à la place de $m_{\mu+1}$ la quantité arbitraire r, de sorte que la solution (55) proviendra de l'intégration de l'équation

$$A_{\mu+1} d^{\mu+1}\Omega_\mu + A_\mu d^\mu \Omega_\mu + \ldots + A_1 d\Omega_\mu = se^{rx},$$

dans laquelle s est aussi une quantité arbitraire; $M_{\mu+1}$ est alors

$$M_{\mu+1} = \frac{s}{r(r-m_1)(r-m_2)\ldots(r-m_\mu)}.$$

Si les racines $m_1, m_2, \ldots, m_\mu$ sont toutes réelles, la fonction se^{rx} conserve la forme d'exponentielle; mais, si elles sont toutes, ou en partie, imaginaires, se^{rx} représentera une fonction de sinus d'ordres supérieurs. En particulier, si les racines sont toutes imaginaires, ou toutes sauf l'une d'elles, l'ordre des sinus sera $\mu - 1$; nous avons donné les formules de transformation des exponentielles en sinus aux équations (50) à (55) de la première partie de cet Ouvrage. Cette transformation est nécessaire pour faire disparaître les quantités imaginaires de (55) et grouper les termes de telle sorte qu'il ne reste plus que des quantités réelles, on conçoit alors qu'il convienne de donner à la fonction se^{rx} une forme qui rende homogène l'expression (55) de Ω_μ. Nous avons donné aux marques (ξ) et (ξ)', au troisième exemple d'application de la méthode secondaire, pour les sinus hyperboliques du premier

ordre, la forme que doit prendre la fonction se^{rx} : une transformation analogue a lieu pour les sinus d'ordres supérieurs.

Il importe de considérer la fonction se^{rx}, ou toute autre fonction arbitraire que l'on jugera convenable d'introduire, dans le cas où l'on fait usage de la série complémentaire du développement (48), ou (50)', de $\mathrm{F}x$, sans cela le coefficient $\Xi_{\mu+1}$ est nul, et il en est de même des suivants $\Xi_{\mu+2}$, $\Xi_{\mu+3}$, ..., puisque dans ces coefficients x prend la valeur a qui est considérée comme sa valeur moyenne et pour laquelle la condition (49) ou (51) est rigoureusement satisfaite. Dans ce fait il n'existe qu'une indétermination, car la série complémentaire a une valeur déterminée; les coefficients sont nuls, mais la somme indéfinie des termes ne l'est pas. C'est pour lever cette indétermination, c'est-à-dire pour donner aux coefficients une valeur différente de zéro, sans toutefois altérer la valeur de la série complémentaire, que l'on introduit une fonction arbitraire qui doit ne pas être nulle pour $x = a$. On doit remarquer en même temps que l'introduction de quantités arbitraires devient inutile si l'on s'en tient à la détermination de la fonction $\mathrm{F}x$ par les fonctions Ω_1, Ω_2, ..., Ω_μ, c'est-à-dire, si l'on considère la génération théorique de la fonction $\mathrm{F}x$ comme suffisamment développée au moyen de ces μ fonctions; car la génération théorique d'une fonction est exempte de toute quantité arbitraire : c'est là son caractère, tandis que la génération technique d'une fonction renferme nécessairement des quantités arbitraires [1].

On conçoit donc que l'on puisse pousser la génération théorique aussi loin qu'on le désire, en diminuant en même temps la valeur de la série complémentaire, partie technique, et en la rendant plus petite que toute quantité donnée. Les fonctions étant par leur nature généralement transcendantes, les développements ne peuvent être limités ordinairement, même en faisant usage de toutes les fonctions actuellement connues : aussi aucune des équations de conditions (49) ne peut être intégrée rigoureusement; mais, en satisfaisant convenablement à ces conditions, on obtient évidemment pour les développements le *maximum de convergence* entre les limites considérées pour les variables, ce qui est un second caractère des développements théoriques.

On voit donc quelle perfection peut atteindre la méthode dont il s'agit : son nom de *méthode suprême* se trouve ainsi complètement justifié.

Pour ce qui concerne la série complémentaire, on peut prendre pour φx la fonction $\frac{x-a}{n+x}$, ou plus simplement la fonction $x-a$, car cette série ne

[1] Les quantités M sont déterminées par les conditions particulières du problème et ne restent pas arbitraires.

doit servir qu'à une évaluation secondaire. Nous avons observé que la série complémentaire était d'autant moins convergente que la détermination de la partie théorique est plus complète, ce qui confirme ce que nous avons dit plus haut.

On peut maintenant rétablir la méthode suprême sans rencontrer aucune difficulté : nous en avons effectué les principaux calculs, mais nous ne pouvons les reproduire ici et par suite donner un exemple de la méthode Cependant nous devons encore dire que, dans chaque cas particulier, il est possible de trouver des solutions spéciales pour les équations de condition représentées par (49) et par suite d'obtenir d'autres développements, et, comme rien ne fixe l'espèce des fonctions que l'on doit introduire dans la composition des quantités Ω, pour satisfaire convenablement aux conditions (49), on peut généralement introduire des fonctions quelconques ; on conçoit alors que l'on puisse parvenir par cette méthode à tous les développements possibles indépendamment du moyen de calcul indiqué plus haut. On peut faire de nombreuses applications de cette méthode, dès à présent, puisqu'elle n'exige que des calculs ordinaires ; c'est d'ailleurs ce que Wronski a signalé vers la fin de la première section de la *Philosophie de la Technie*.

Enfin la méthode suprême permet non seulement d'obtenir l'expression de fonctions données explicitement, mais encore l'expression de fonctions engagées dans des équations. Cependant, dans la pratique, il est préférable, pour résoudre ou intégrer les équations, de recourir aux méthodes secondaires.

Nous avons donné les indications précédentes sur la méthode suprême pour achever de préciser ce que Wronski entend par *expression théorique* et distinguer ce genre d'expressions des *expressions techniques*, et aussi pour compléter l'ensemble des principaux moyens dont on peut dès maintenant disposer pour effectuer surtout les calculs d'un ordre élevé tels qu'ils se présentent dans la plupart des applications à l'étude des phénomènes de la nature.

III. — Agrégats. — Résolution des équations linéaires.

Agrégats. — Nous venons d'indiquer les principales applications de la Loi suprême aux développements des fonctions : nous allons maintenant examiner d'autres conséquences de cette loi. Mais, auparavant, nous dirons quelques mots des *Agrégats* dont nous avons déjà fait un fréquent usage.

Un agrégat est une somme de quantités dans laquelle l'ordre des termes est indifférent par rapport au résultat.

Un produit de polynômes peut être représenté par un agrégat, car l'ordre des termes est indifférent dans la somme qui forme le résultat; mais une série ne peut pas être représentée par un agrégat, parce que l'ordre des termes doit être respecté dans la sommation.

Waring a le premier considéré ces sommes et en a fait d'heureuses applications; toutefois il ne les distinguait pas des sommes ordinaires et les notait par Σ. Wronski, remarquant le parti que l'on pouvait en tirer, les désigna sous le nom d'agrégats, les notant par la caractéristique *Agr*, et en fit un usage systématique.

Nous venons de dire que les produits pouvaient être ordinairement représentés par des agrégats; soient les polynômes

$$\begin{array}{l} A_1(1) + A_2(1) + A_3(1) + \ldots, \\ A_1(2) + A_2(2) + A_3(2) + \ldots, \\ A_1(3) + A_2(3) + A_3(3) + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

leur produit sera évidemment de la forme

$$\mathrm{Agr}[A_{\rho_1}(1)\,A_{\rho_2}(2)\,A_{\rho_3}(3)\ldots];$$

pour effectuer l'opération, il faudra donner séparément aux indices ρ toutes les valeurs qui leur conviennent : le résultat se ramène donc à la formation de combinaisons d'indices. Nous ferons plus loin des applications de cette formule.

Soit encore à trouver l'expression de la $m^{\text{ième}}$ puissance du polynôme

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

m étant un nombre entier et positif; le résultat est

$$(56) \qquad (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^m = 1^{m|1}\,\mathrm{Agr}\left(\frac{a_1^{\rho_1} a_2^{\rho_2} \ldots a_n^{\rho_n}}{1^{\rho_1|1}\,1^{\rho_2|1} \ldots 1^{\rho_n|1}}\right),$$

avec la condition

$$(56)' \qquad \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n = m,$$

car la puissance m est égale au produit de m polynômes identiques : un terme du résultat doit donc contenir le produit de m quantités a prises chacune dans un des polynômes; ces lettres seront affectées d'exposants ρ indiquant le nombre de fois que chacune d'elles aura été prise en même temps dans plusieurs polynômes et la somme des exposants sera toujours égale au degré

m de la puissance. De plus le nombre de manières de prendre $a_1 \rho_1$ fois dans m polynômes identiques, $a_2 \rho_2$ fois, $a_3 \rho_3$ fois, ... est, comme on le sait,

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2\ldots\rho_1.1.2\ldots\rho_2\ldots1.2\ldots\rho_n} = \frac{1^{m|1}}{1^{\rho_1|1}\,1^{\rho_2|1}\ldots1^{\rho_n|1}};$$

m étant constant, on peut faire sortir de l'agrégat la factorielle du numérateur, d'où l'expression (56).

Les agrégats ne sont donc, à proprement parler, comme les déterminants, que l'indication des opérations à effectuer pour lesquelles il faut faire certaines combinaisons d'indices, combinaisons qu'il convient d'effectuer méthodiquement. On conçoit, d'après cela, que les agrégats aient certains rapports avec les déterminants et qu'ils puissent être quelquefois substitués à ces derniers; c'est ce que nous allons examiner.

Résolution des équations linéaires. — Les transformations qui ont servi à établir la Loi suprême conduisent à la résolution des équations du premier degré. En effet, nous avons vu que la détermination du coefficient général dépend de la résolution d'un nombre indéfini d'équations linéaires; cette résolution comprend donc le cas ordinaire où le nombre des équations est fini. Voyons sous quelle forme les expressions données plus haut présentent la solution.

Les μ premières équations de condition (2) avec la relation (10), dans lesquelles nous supposerons nulles les fonctions $\Omega_{\mu+1}$, $\Omega_{\mu+2}$, .. représentent un système de $\mu+1$ équations linéaires dont les quantités $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_\mu$ sont les μ inconnues, car les fonctions $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_\mu$ et F sont non seulement arbitraires, mais les opérations effectuées sur ces fonctions et désignées par $\Delta, \Delta^2, \Delta^3, \ldots$ sont, elles aussi, complètement arbitraires, par suite les quantités de la forme $\Delta^\rho \Omega_\sigma$ peuvent représenter des coefficients quelconques.

La solution de ces équations, dont l'une d'elles est représentée par

$$(57) \qquad \Delta^\nu F a = A_1 \Delta^\nu \Omega_1 + A_2 \Delta^\nu \Omega_2 + \ldots + A_\mu \Delta^\nu \Omega_\mu,$$

est ainsi

$$(58) \qquad \begin{cases} A_0 = \Xi_0 + \Xi_1 \Psi_1(0) + \Xi_2 \Psi_2(0) + \ldots + \Xi_\mu \Psi_\mu(0), \\ A_1 = \Xi_1 + \Xi_2 \Psi_1(1) + \Xi_3 \Psi_2(1) + \ldots + \Xi_\mu \Psi_{\mu-1}(1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_\nu = \Xi_\nu + \Xi_{\nu+1} \Psi_1(\nu) + \Xi_{\nu+2} \Psi_2(\nu) + \ldots + \Xi_\mu \Psi_{\mu-\nu}(\nu), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_\mu = \Xi_\mu. \end{cases}$$

En effet, les fonctions $\Omega_{\mu+1}$, $\Omega_{\mu+2}$, ..., étant nulles, les fonctions Ξ_0 à Ξ_μ

sont les seules à considérer; $\Phi_\rho(\sigma)$ est nul quand $\sigma > \mu$ et ρ ne peut dépasser μ, d'après (9) ou (11); par suite, les fonctions $\Psi_1(0)$ à $\Psi_1(\mu-1)$, $\Psi_2(1)$ à $\Psi_2(\mu-2)$, ..., $\Psi_{\mu-1}(1)$ et $\Psi_\mu(0)$ sont les seules qui ne soient pas nulles.

Observons que chacune des $\mu+1$ expressions des inconnues, (58), est différente; mais, comme ces inconnues A_0, A_1, A_2, ... ne se distinguent que par l'ordre qui leur est assigné et qui est tout à fait arbitraire, on peut les intervertir en changeant aussi les quantités qui leur correspondent. Il en résulte que chacune des formes des expressions précédentes peut être attribuée à chacune des inconnues; les formes de ces $\mu+1$ inconnues sont donc équivalentes. Ainsi on peut dire généralement qu'un système de μ équations du premier degré à μ inconnues admet pour expression de ces inconnues μ systèmes équivalents.

Le dernier système est celui dont on fait ordinairement usage, car il donne

$$A_\mu = \frac{\text{Ⓦ}[\Delta^0\Omega_0\,\Delta^1\Omega_1\,\Delta^2\Omega_2\,\ldots\,\Delta^\mu F a]}{\text{Ⓦ}[\Delta^0\Omega_0\,\Delta^1\Omega_1\,\Delta^2\Omega_2\,\ldots\,\Delta^\mu\Omega_\mu]};$$

mais les autres systèmes doivent aussi être pris en considération, le premier principalement. Ces systèmes étant équivalents, ils ne peuvent être que des transformations les uns des autres, et, puisqu'ils sont formés de déterminants, leur comparaison conduira à divers théorèmes sur ces fonctions, ainsi que le remarque Wronski.

Premier système de résolution, emploi d'agrégats. — Nous allons nous occuper particulièrement du premier système d'expression des inconnues.

Considérons un système d'équations linéaires de la forme

$$(59)\quad \left\{\begin{array}{l} M_0 = X_0 + X_1 A_1(1) + X_2 A_2(2) + \ldots, \\ M_1 = X_1 + X_2 A_1(2) + X_3 A_2(3) + \ldots, \\ M_2 = X_2 + X_3 A_1(3) + X_4 A_2(4) + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Ce genre d'équations se présente souvent et nous aurons occasion de le rencontrer plus loin ([1]).

Pour parvenir à la solution, il suffit de se reporter aux formules précédentes. D'après la première expression de (58), le dénominateur de $\Phi_\rho(\sigma)$ se réduit à l'unité, et cette fonction est ici $A_{\sigma-\rho}(\sigma)$, d'après (11). Pour Ξ_μ le

---

([1]) Wronski donne la solution de ce système à la fin de sa *Critique des fonctions génératrices*, et aussi dans le Tome III de la *Réforme* à propos de la méthode primordiale, p. 317.

dénominateur est aussi l'unité et représente la quantité M_μ; de plus, si l'on remplace la lettre Ψ par B, on a, d'après (9) ou (11),

$$(60)\quad \begin{cases} B_1(\mu) = -A_1(\mu+1), \\ B_2(\mu) = -A_2(\mu+2) - A_1(\mu+2)B_1(\mu), \\ B_3(\mu) = -A_3(\mu+3) - A_2(\mu+3)B_1(\mu) - A_1(\mu+3)B_2(\mu), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

En faisant successivement μ égal à 0, 1, 2, ..., on obtient

$$(61)\quad \begin{cases} X_0 = M_0 + M_1 B_1(0) + M_2 B_2(0) + \ldots, \\ X_1 = M_1 + M_2 B_1(1) + M_3 B_2(1) + \ldots, \\ X_2 = M_2 + M_3 B_1(2) + M_4 B_2(2) + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Comparons, d'après (58), les expressions du premier système de résolution au dernier. Si nous prenons, par exemple, l'expression de la première inconnue dans (61), nous aurons, pour la même inconnue, d'après le dernier système,

$$(62)\quad X_0 = \begin{vmatrix} M_0 & A_1(1) & A_2(2) & \ldots & A_{\mu-1}(\mu-1) \\ M_1 & 1 & A_1(2) & \ldots & A_{\mu-2}(\mu-1) \\ M_2 & 0 & 1 & \ldots & A_{\mu-3}(\mu-1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

En développant ce déterminant par rapport aux quantités de la première colonne, on obtient

$$X_0 = M_0 + M_1 B_1(0) + M_2 B_2(0) + \ldots.$$

$(-1)^\nu B_\nu(0)$ est le déterminant mineur correspondant à M_ν; on voit ainsi la signification des quantités B.

Les expressions (60) donnent le mode de formation des quantités B et ne permettent que de les calculer de proche en proche; quant à l'expression (62) elle ne se prête pas commodément au calcul des mêmes quantités à cause des termes nuls qu'elle contient. Il convient donc de rechercher une autre forme que nous allons déduire de ce qui précède.

Si, dans (62), nous mettons $A_{\mathcal{E}_\mu}(\mu)$ à la place de $M_{\mu-\mathcal{E}_\mu}$, afin de rendre la notation plus régulière, le déterminant ou somme combinatoire (62) est, par définition, la somme de tous les produits, de la forme

$$(63)\quad A_{\mathcal{E}_1-(\mu-1)}(1)\, A_{\mathcal{E}_2-(\mu-2)}(2) \ldots A_{\mathcal{E}_\mu}(\mu),$$

que l'on obtient en effectuant les permutations de tous les nombres $\mathcal{E}_1$,

$\beta_2, \ldots, \beta_\mu$, en considérant comme l'unité le facteur dont l'indice $\beta_\nu - (\mu - \nu)$ est zéro, et comme nuls tous ceux dont l'indice est négatif; le signe de chaque produit doit être déterminé comme nous allons le dire.

Les nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu$ forment la suite des nombres $1, 2, \ldots, \mu$, dans un ordre quelconque; il en résulte que la somme des indices inférieurs est constante et égale à μ.

Le signe du produit change à chaque permutation des nombres β; ce signe est positif ou négatif suivant que le nombre des permutations est pair ou impair. Or, pour le premier indice $\beta_1 - (\mu - 1)$, β_1 ne peut être que μ ou $\mu - 1$, d'après ce qui précède; pour $\beta_2 - (\mu - 2)$, β_2 ne peut être que μ, $\mu - 1$ ou $\mu - 2$; ainsi de suite. Il en résulte que, les nombres β étant rangés dans l'ordre $\mu, \mu - 1, \ldots, 2, 1$, l'un d'eux ne peut rétrograder que d'un rang vers la gauche, tandis qu'il peut avancer de tous les rangs vers la droite.

Mais, comme cet avancement vers la droite ne peut se faire que moyennant une rétrogradation d'un autre indice, il faudra que, pour une permutation quelconque, un indice inférieur $\rho_\nu = \beta_\nu - (\mu - \nu)$ soit forcément nul. Ainsi le nombre des permutations sera donné par le nombre des indices ρ qui seront nuls, et, en considérant toutes les quantités A comme positives, le signe du produit sera donné immédiatement par le nombre des facteurs existant dans (63). Le produit qui se réduit à $A_\mu(\mu)$ est positif, le signe de tous les autres est ainsi fixé.

Si ϖ est le nombre des facteurs du produit et si l'on fait généralement

$$\rho_\nu = \beta_\nu - (\mu - \nu), \tag{64}$$

la somme combinatoire dont il s'agit ne sera autre qu'un agrégat, et (62) pourra s'écrire

$$X_0 = \mathrm{Agr}[(-1)^{\varpi+1} A_{\rho_1}(1) A_{\rho_2}(2) \ldots A_{\rho_\mu}(\mu)], \tag{65}$$

avec la condition

$$\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_\mu = \mu, \tag{65'}$$

équation indéterminée résoluble en nombres entiers positifs; d'après ce qui a été dit, ρ_ν ne peut prendre que les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \nu$.

Nous obtenons de cette manière le rapport qui existe entre les déterminants et les agrégats; ceux-ci peuvent donc servir à la résolution des équations linéaires et, dans certains cas, avec plus d'avantage que les détermi-

nants, car tout système d'équations du premier degré peut être mis sous la forme (59), moyennant une préparation convenable, puis être résolu par agrégats, et la formation des produits du résultat se ramène à la combinaison d'indices d'après la condition (65)'.

Nous avons supposé, dans (64), que les indices entre parenthèses étaient donnés et nous en avons déduit les indices inférieurs; mais, sans nous en tenir à cette seule supposition, il convient de rechercher les formes principales de la relation qui existe entre les deux sortes d'indices; nous en déduirons le cas où, les indices inférieurs étant donnés, on voudrait obtenir les indices entre parenthèses.

Relation des indices et transformations. — Remplaçons ν par σ_ν, (64), qui est la relation fondamentale entre les indices, s'écrira

$$\rho_\nu = \beta_\nu - (\mu - \sigma_\nu)$$

ou

$$\rho_\nu = \sigma_\nu - (\mu - \beta_\nu). \tag{66}$$

Les indices σ varient de 1 à μ et ne peuvent être répétés dans un même produit. Pour l'un des produits, soit, parmi les quantités β, $\beta_\alpha = \mu$, l'expression (66) donne

$$\rho_\alpha = \sigma_\alpha.$$

Pour une seconde valeur de β, nécessairement différente de μ, on aura

$$\sigma_\alpha = \mu - \beta_\beta,$$

d'où, d'après (66),

$$\rho_\beta = \sigma_\beta - \sigma_\alpha.$$

Pour une troisième valeur de β, différente des premières, on aura encore

$$\sigma_\beta = \mu - \beta_\gamma,$$

d'où

$$\rho_\gamma = \sigma_\gamma - \sigma_\beta, \tag{67}$$

et ainsi de suite, jusqu'à $\sigma_\mu = \mu$; les autres valeurs de β donneraient $\rho = 0$, ce qui correspond à un facteur $A_\rho(\sigma)$ égal à l'unité, comme nous l'avons vu. Ainsi, parmi les relations cherchées des indices, nous aurons la relation (67) qui donne l'indice inférieur ρ en fonction de deux indices consécutifs σ_γ et σ_β.

Il est à remarquer que les indices σ_α, σ_β, ..., σ_μ sont des nombres croissants; en additionnant les égalités successives, de la forme (67), jusqu'à ρ_η, on a

$$\rho_\alpha + \rho_\beta + \ldots + \rho_\eta = \sigma_\eta. \tag{68}$$

C'est une autre forme de la relation des indices. Ainsi, à l'expression (65) jointe à (65)′, on peut substituer la suivante, plus générale à certains égards :

$$X = \text{Agr}\left[(-1)^{\varpi+1} A_{\rho_\alpha}(\sigma_\alpha) A_{\rho_\beta}(\sigma_\beta) \ldots A_{\rho_\mu}(\sigma_\mu)\right], \tag{69}$$

avec la condition (68). Il convient de supprimer l'indice de X, car, d'après ce qui précède, la valeur de l'indice μ marque celle de l'indice de X; en effet, si l'on a μ équations (59) à μ inconnues, l'une d'elles X_ν correspond à l'indice $\mu - \nu$ mis à la place de μ, puisque X_ν peut être considéré comme la première inconnue d'un système de $\mu - \nu$ équations.

Les indices inférieurs ρ pouvant être répétés un nombre de fois marqué respectivement par q_α, q_β, ..., q_μ, pour chacun d'eux, on peut substituer à la condition (68) la condition

$$\rho_\alpha q_\alpha + \rho_\beta q_\beta + \ldots + \rho_\mu q_\mu = \mu,$$

ou, ce qui revient au même,

$$1 q_1 + 2 q_2 + 3 q_3 + \ldots + \mu q_\mu = \mu, \tag{70}$$

et l'on fera

$$q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_\mu = \varpi. \tag{70$'$}$$

Alors on peut également écrire, au lieu de (69),

$$X = \text{Agr}[(-1)^{\varpi+1} \Pi_{q_1} A_1(\sigma_1) . \Pi_{q_2} A_2(\sigma_2) \ldots \Pi_{q_\mu} A_\mu(\sigma_\mu)]; \tag{71}$$

la lettre Π_{q_ν} désigne le produit de q facteurs $A_\nu(\sigma_\nu)$, l'indice σ satisfaisant aux conditions ci-dessus [1].

Il faut remarquer que, pour un système de valeurs de q_1, q_2, ..., q_μ, le nombre de produits différents correspondant à des valeurs différentes des indices σ est

$$\frac{1^{\varpi|1}}{1^{q_1|1}\, 1^{q_2|1} \ldots 1^{q_\mu|1}}. \tag{72}$$

[1] Nous avons conservé le système d'indices de Wronski, mais on peut en concevoir de différents; on passerait facilement de l'un à l'autre.

Les agrégats sont susceptibles d'être développés comme les déterminants et d'être décomposés en agrégats mineurs. Pour appliquer cette décomposition à un agrégat tel que (65), qui est identique à l'une des expressions (61), en changeant $M_{\mu-\nu}$ en $A_\nu(\mu)$, on a

$$X_\nu = A_{\mu-\nu}(\mu) + A_{\mu-\nu-1}(\mu) B_1(\nu) + A_{\mu-\nu-2}(\mu) B_2(\nu) + \ldots + A_1(\mu) B_{\mu-\nu-1}(\nu)$$

ou encore

$$(73) \qquad X_\nu = A_{\mu-\nu}(\mu) + A_{\mu-\nu-1}(\mu - 1) B_1 + A_{\mu-\nu-2}(\mu - 2) B_2 + \ldots + A_1(\nu + 1) B_{\mu-\nu-1}.$$

Ces expressions diffèrent, par rapport au déterminant (62), en ce que celui-ci se trouve développé par rapport aux éléments de la première colonne, dans le premier cas, et par rapport aux éléments de la première ligne, dans le dernier.

L'avantage que présente ce second développement est que les déterminants mineurs B_1, B_2, B_3, ..., qui entrent dans l'expression de X_ν, sont ceux qui entrent aussi dans les autres inconnues $X_{\nu-1}$ à X_0 ; pour cette raison nous ne laissons subsister qu'un seul indice dans les quantités B. On obtient donc immédiatement, pour l'agrégat B_λ facteur de $A_{\mu-\lambda-\nu}(\mu - \lambda)$,

$$(73)' \qquad B_\lambda = \operatorname{Agr}\left[(-1)^{\varpi} A_{\rho_1}(\mu - \lambda + 1) A_{\rho_2}(\mu - \lambda + 2) \ldots A_{\rho_\lambda}(\mu)\right]$$

avec

$$\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_\lambda = \lambda,$$

ϖ étant toujours le nombre des facteurs qui entrent dans un produit partiel. On a encore, d'après les expressions de X_ν (65) et (73), (73)',

$$(73)'' \quad \left\{ \begin{aligned} & \operatorname{Agr}\left[(-1)^{\varpi+1} A_{\rho_1}(\nu + 1) A_{\rho_2}(\nu + 2) \ldots A_{\rho_{\mu-\nu}}(\mu)\right] \\ & = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu-\nu+1} A_{\mu-\lambda-\nu}(\mu - \lambda) \operatorname{Agr}\left[(-1)^{\varpi} A_{\rho_1}(\mu - \lambda + 1) A_{\rho_2}(\mu - \lambda + 2) \ldots A_{\rho_\lambda}(\mu)\right], \end{aligned} \right.$$

$$\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_\lambda = \lambda.$$

Exemple de résolution par agrégats. — Pour appliquer ce qui précède à un exemple simple et qui nous sera utile plus loin, cherchons à déterminer les fonctions aleph données par la relation générale

$$(74) \qquad A_\mu \aleph(\nu + \mu) + A_{\mu-1} \aleph(\nu + \mu - 1) + \ldots + A_0 \aleph(\nu) = 0,$$

les premières relations étant

$$(74)' \qquad \left\{ \begin{aligned} & A_\mu \aleph(1) + A_{\mu-1} = 0, \\ & A_\mu \aleph(2) + A_{\mu-1} \aleph(1) + A_{\mu-2} = 0, \end{aligned} \right.$$

et ainsi de suite. L'ensemble de ces relations constitue un système d'équations linéaires qui donne, par comparaison avec le système (59), les valeurs suivantes, en supposant provisoirement $A_\mu = 1$: $A_{\mu-1}$ remplace tous les coefficients qui portent l'indice inférieur 1, $A_1(1)$, $A_1(2)$, $A_1(3)$, ...; $A_{\mu-2}$ remplace tous les coefficients qui portent l'indice inférieur 2; A_0 remplace tous les coefficients qui portent l'indice inférieur μ, et les autres coefficients sont nuls.

N'ayant pas ainsi à tenir compte des indices entre parenthèses, il y a lieu d'appliquer l'expression (71) avec (70) et (70)'; $\Pi_q A$ devient alors A^q, et à cause de la répétition des termes identiques, dont le nombre est donné par (72), on a

$$(75)\quad \left\{\begin{aligned} &\aleph(\nu+\mu) = \operatorname{Agr}\left[\left(\frac{-1}{A_\mu}\right)^{\varpi} 1^{\varpi|1} \frac{A_{\mu-1}^{q_1}}{1^{q_1|1}} \frac{A_{\mu-2}^{q_2}}{1^{q_2|1}} \cdots \frac{A_0^{q_\mu}}{1^{q_\mu|1}}\right],\\ &1q_1 + 2q_2 + \ldots + \mu q_\mu = \nu + \mu,\\ &q_1 + q_2 + \ldots + q_\mu = \varpi, \end{aligned}\right.$$

en rétablissant la valeur générale du premier coefficient A_μ.

On peut avoir à faire le produit de plusieurs agrégats; d'après la définition même, le résultat sera un agrégat dont la condition relative aux indices sera la somme ou l'ensemble des conditions des agrégats primitifs. On rencontre en effet des systèmes de systèmes d'équations linéaires, notamment dans le calcul de certaines fonctions symétriques; leur résolution s'obtient en définitive au moyen d'un agrégat composé contenant le produit de plusieurs agrégats.

Wronski a étudié spécialement les fonctions définies par le système des équations (59) désigné sous le nom de *médiateurs* ou fonctions aleph générales. Celles-ci s'expriment au moyen de médiateurs simples ou fonctions aleph, et l'on verra que les propriétés de ces fonctions conduisent à l'intégration des équations linéaires à coefficients variables, ainsi qu'il en est donné un exemple à la fin de la *Critique des fonctions génératrices*.

Dans ce qui va suivre, nous examinerons particulièrement le cas simple des fonctions aleph et de l'intégration des équations linéaires à coefficients constants.

IV. — Intégration des équations différentielles linéaires a coefficients constants. — Fonctions symétriques et sinus des ordres supérieurs.

Sur les différences. — Les développements qui suivent sont relatifs aux quantités qui figurent dans les intégrations. Les fonctions de différences,

importantes au point de vue auquel nous nous plaçons, ne sont que succinctement étudiées dans les ouvrages classiques ; nous allons reprendre leurs propriétés fondamentales pour parvenir aux résultats qu'il nous importe de connaître.

Désignons par ω l'accroissement Δx de la variable x, la différence de la fonction $\varphi(x)$ sera, par définition,

$$\Delta\varphi(x) = \varphi(x+\omega) - \varphi(x), \tag{76}$$

pour les différences progressives. On en déduit, comme on sait, pour la différence $\mu^{\text{ième}}$

$$\Delta^\mu\varphi(x) = \varphi(x+\mu\omega) - \frac{\mu}{1}\varphi(x+\overline{\mu-1}\,\omega) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\varphi(x+\overline{\mu-2}\,\omega) - \ldots$$

ou

$$\Delta^\mu\varphi(x) = (-1)^\mu\left[\varphi(x) - \frac{\mu}{1}\varphi(x+\omega) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\varphi(x+2\omega) - \ldots\right]. \tag{77}$$

Cette formule subsiste, quel que soit le nombre μ, mais elle n'a de signification qu'autant que ce nombre est entier, positif ou négatif. Dans ce dernier cas, l'expression représente l'opération inverse de la différentiation, c'est-à-dire, une somme ou intégrale ; le développement est indéfini, tandis qu'il est nécessairement fini si μ est positif, puisque tous les coefficients contiennent un facteur nul après le $\mu+1^{\text{ième}}$ terme.

Si μ est négatif, la caractéristique Δ, suivant les conventions ordinaires, doit être remplacée par le signe Σ ; ainsi l'on a

$$\Sigma^\mu\varphi(x) = (-1)^\mu\left[\varphi(x) + \frac{\mu}{1}\varphi(x+\omega) + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2}\varphi(x+2\omega) + \ldots\right]. \tag{78}$$

En effet, supposons que cette expression soit vraie pour la valeur μ ; en prenant les différences des deux membres, on a

$$\begin{aligned}\Delta[\Sigma^\mu\varphi(x)] &= \Sigma^{\mu-1}\varphi(x)\\ &= (-1)^\mu\left\{\left[\varphi(x+\omega) + \frac{\mu}{1}\varphi(x+2\omega) + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2}\varphi(x+3\omega) + \ldots\right]\right.\\ &\qquad\left.-\left[\varphi(x) + \frac{\mu}{1}\varphi(x+\omega) + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2}\varphi(x+2\omega) + \ldots\right]\right\}\\ &= (-1)^{\mu-1}\left[\varphi(x) + \frac{\mu-1}{1}\varphi(x+\omega) + \frac{(\mu-1)\mu}{1.2}\varphi(x+2\omega) + \ldots\right];\end{aligned}$$

cette dernière expression est, d'après (78), le développement de $\Sigma^{\mu-1}\varphi(x)$, et son exactitude est démontrée, puisque (78) se vérifie pour $\mu = 0$.

Si, au lieu des différences progressives, on considérait les différences régressives, on aurait par définition

$$(76)' \qquad \Delta\varphi(x) = \varphi x - \Delta\varphi(x-\omega),$$

pour la première différence de $\varphi(x)$; la $\mu^{\text{ième}}$ différence serait

$$(77)' \qquad \Delta^\mu\varphi(x) = \varphi(x) - \frac{\mu}{1}\varphi(x-\omega) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\varphi(x-2\omega) - \ldots,$$

et pour la $\mu^{\text{ième}}$ intégrale

$$(78)' \qquad \Sigma^\mu\varphi(x) = \varphi x + \frac{\mu}{1}\varphi(x-\omega) + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2}\varphi(x-2\omega) + \ldots;$$

on a ici toujours le même signe. On doit faire usage des différences progressives ou régressives suivant les circonstances.

Wronski considère comme loi fondamentale du calcul des différences l'expression

$$(79) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta^\mu(\mathrm{F}x\,fx) = {} & \mathrm{F}x\,\Delta^\mu fx + \frac{\mu}{1}\Delta\,\mathrm{F}x(\Delta^{\mu-1}fx - \Delta^\mu fx) \\ & + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\Delta^2\,\mathrm{F}x(\Delta^{\mu-2}fx - 2\Delta^{\mu-1}fx + \Delta^\mu fx) + \ldots, \end{aligned} \right.$$

et, comme celle du Calcul intégral, l'expression inverse

$$(80) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma^\mu(\mathrm{F}x\,fx) = {} & \mathrm{F}x\,\Sigma^\mu fx - \frac{\mu}{1}\Delta\,\mathrm{F}x(\Sigma^{\mu+1}fx - \Sigma^\mu fx) \\ & + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2}\Delta^2\,\mathrm{F}x(\Sigma^{\mu+2}fx - 2\Sigma^{\mu+1}fx + \Sigma^\mu fx) - \ldots. \end{aligned} \right.$$

Ces deux lois peuvent se déduire des précédentes, mais il est plus simple de montrer, comme plus haut, que si elles ont lieu pour une valeur de μ, elles ont lieu aussi pour la valeur $\mu + 1$.

La loi (79) est fondamentale, car elle porte sur l'un des algorithmes primitifs; le premier donnerait seulement

$$\Delta^\mu(\mathrm{F}x + fx) = \Delta^\mu\,\mathrm{F}x + \Delta^\mu fx,$$

ce qui n'est pas une transformation, et l'on pourrait voir que le troisième $\Delta^\mu(\mathrm{F}x^{fx})$ se ramène au second.

Si les différences sont infiniment petites, les expressions (79) et (80) deviennent

$$(81)\quad d^{\mu}(\mathrm{F}x\, fx) = \mathrm{F}x\, d^{\mu} fx + \frac{\mu}{1}\, d\,\mathrm{F}x\, d^{\mu-1} fx + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\, d^2\,\mathrm{F}x\, d^{\mu-2} fx + \ldots \quad [1]$$

et

$$(82)\quad \left\{ \begin{aligned} \int^{\mu} \mathrm{F}x\, fx\, dx^{\mu} = \mathrm{F}x \int^{\mu} fx\, dx^{\mu} - \frac{\mu}{1}\, \frac{d\,\mathrm{F}x}{dx} \int^{\mu+1} fx\, dx^{\mu+1} \\ + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2}\, \frac{d^2\,\mathrm{F}x}{dx^2} \int^{\mu+2} fx\, dx^{\mu+2} - \ldots . \end{aligned} \right.$$

La première expression est finie et la seconde indéfinie ; celle-ci présente une grande utilité, elle contient, comme cas particuliers, plusieurs formules connues, entre autres, celle de Bernoulli et celle des intégrations par parties.

Ce serait ici l'occasion d'appliquer les agrégats au calcul des différentielles secondaires, ou de fonctions de fonctions d'une ou plusieurs variables indépendantes. Ces calculs ont été donnés en grands détails par Wronski dans la seconde section de la *Philosophie de la Technie ;* nous ne pouvons les reproduire ici.

Intégration des équations linéaires à coefficients constants ; solution fondamentale. — Passons aux formules d'intégration. Soit $f(x)$ une fonction donnée par la relation

$$(83)\quad f(x) = \mathrm{A}_0\, \varphi(x) + \mathrm{A}_1\, \varphi(x+\omega) + \mathrm{A}_2\, \varphi(x+2\omega) + \ldots + \mathrm{A}_{\mu}\, \varphi(x+\mu\omega),$$

$\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_{\mu}$ étant μ constantes et ω l'accroissement de x ; proposons-nous de trouver l'expression de $\varphi(x)$ en fonction de $f(x)$.

On peut déduire de (83) autant de relations que l'on voudra en donnant à x les accroissements successifs ω, 2ω, ... Multiplions respectivement chacune des relations ainsi obtenues par $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, dans chaque membre, nous aurons

$$(84)\quad \left\{ \begin{aligned} \lambda_0 f(x) &= \lambda_0 \mathrm{A}_0 \varphi(x) + \lambda_0 \mathrm{A}_1 \varphi(x+\omega) + \lambda_0 \mathrm{A}_2 \varphi(x+2\omega) + \ldots + \lambda_0 \mathrm{A}_{\mu}\, \varphi(x+\mu\omega), \\ \lambda_1 f(x+\omega) &= \lambda_1 \mathrm{A}_0 \varphi(x+\omega) + \lambda_1 \mathrm{A}_1 \varphi(x+2\omega) + \ldots + \lambda_1 \mathrm{A}_{\mu-1} \varphi(x+\mu\omega) + \lambda_1 \mathrm{A}_{\mu}\, \varphi(x+\overline{\mu+1}\omega), \\ \lambda_2 f(x+2\omega) &= \lambda_2 \mathrm{A}_0 \varphi(x+2\omega) + \ldots + \lambda_2 \mathrm{A}_{\mu-2} \varphi(x+\mu\omega) + \lambda_2 \mathrm{A}_{\mu-1} \varphi(x+\overline{\mu+1}\omega) + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{\mu} f(x+\mu\omega) &= \lambda_{\mu} \mathrm{A}_0\, \varphi(x+\mu\omega) + \lambda_{\mu} \mathrm{A}_1\, \varphi(x+\overline{\mu+1}\omega) + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

[1] Il existe pour les facultés une loi analogue à (81) ou (79) ; ces lois présentent une certaine analogie avec la formule du binôme de Newton.

Faisons la somme des quantités ainsi écrites en profitant de l'indétermination des quantités λ pour éliminer les fonctions φ, sauf $\varphi(x)$, les conditions seront

$$(85)\quad \left\{\begin{array}{l} 0 = \lambda_0 A_1 + \lambda_1 A_0, \\ 0 = \lambda_0 A_2 + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ 0 = \lambda_0 A_\mu + \lambda_1 A_{\mu-1} + \lambda_2 A_{\mu-2} + \ldots + \lambda_\mu \quad A_0, \\ 0 = \lambda_1 A_\mu + \lambda_2 A_{\mu-1} + \lambda_3 A_{\mu-2} + \ldots + \lambda_{\mu+1} A_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Les quantités λ deviennent toutes déterminées, sauf λ_0, et l'on a pour la fonction cherchée

$$(86)\qquad \varphi(x) = \Sigma \lambda_\nu f(x + \nu\omega).$$

Quant au système d'équations linéaires (85) il est de la forme de celui que nous avons étudié précédemment, (59), et, plus particulièrement, il est identique au système (74), (74)'. Les quantités λ sont des fonctions aleph et la résolution des équations (85) au moyen d'agrégats donne

$$(87)\quad \left\{\begin{array}{l} \lambda_\nu = \lambda_0 \,\mathrm{Agr}\left[\left(\dfrac{-1}{A_0}\right)^\sigma 1^{\sigma|1} \dfrac{A_1^{\rho_1} A_2^{\rho_2} \ldots A_\mu^{\rho_\mu}}{1^{\rho_1|1}\, 1^{\rho_2|1} \ldots 1^{\rho_\mu|1}}\right], \\ 1\rho_1 + 2\rho_2 + 3\rho_3 + \ldots + \mu\rho_\mu = \nu, \\ \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_\mu = \sigma. \end{array}\right.$$

Ces fonctions aleph sont des fonctions symétriques des inverses des racines n de l'équation

$$(88)\qquad A_\mu n^\mu + A_{\mu-1} n^{\mu-1} + \ldots + A_1 n + A_0 = 0;$$

les fonctions aleph de ces racines mêmes sont données par la relation (74) ou par l'expression (75) ([1]).

Wronski nomme fonctions aleph négatives les fonctions définies par (85); elles ont avec les fonctions aleph positives la relation suivante :

$$(89)\qquad A_\mu \aleph(0) + A_0 \aleph(-\mu) = 0,$$

les fonctions $\aleph(-1)$ à $\aleph(-\mu+1)$ étant nulles; de cette manière λ_0 est $\aleph(-\mu)$, λ_1 est $\aleph(-\mu-1)$, λ_2 est $\aleph(-\mu-2)$, ainsi de suite, et (74),

([1]) Pour faire concorder les notations de (74), (75) avec (85), (87) il faut dans les premières relations changer ϖ et q en σ et ρ.

$(74)'$, (89) et (85) ne forment qu'une seule et même suite de relations sur une même espèce de quantités. Il reste la fonction $\aleph(0)$ qui est arbitraire; nous la prendrons provisoirement égale à l'unité.

En comparant (74) à (83), on voit que, si l'on a

$$f(x) = 0,$$

et si l'on pose $\nu = \frac{x}{\omega}$, la fonction $\aleph\left(\frac{x}{\omega}\right)$ constitue une solution de l'équation (83).

Ainsi, Q étant une constante arbitraire, on a, pour solution de l'équation

$$(90) \qquad 0 = A_0\varphi(x) + A_1\varphi(x+\omega) + A_2\varphi(x+2\omega) + \ldots + A_\mu\varphi(x+\mu\omega),$$

la fonction

$$\varphi(x) = Q\aleph\left(\frac{x}{\omega}\right);$$

mais, d'après (74), on a aussi

$$\varphi(x) = Q_\varpi \aleph\left(\frac{x}{\omega} + \varpi\right),$$

quel que soit le nombre ϖ. Cependant il ne faut considérer que μ valeurs de ϖ, puisque (74) est une relation entre $\mu + 1$ fonctions aleph consécutives. Il en résulte que la solution complète de (90) est

$$(91) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x) &= Q_1\aleph\left(\frac{x}{\omega}+1\right) \\ &\quad + Q_2\aleph\left(\frac{x}{\omega}+2\right) + \ldots + Q_\mu\aleph\left(\frac{x}{\omega}+\mu\right) = \Sigma_\mu Q_\sigma \aleph\left(\frac{x}{\omega}+\sigma\right), \end{aligned} \right.$$

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_\mu$ étant μ constantes arbitraires. La solution complète de (83) est par suite

$$(92) \qquad \varphi(x) = \Sigma_\mu Q_\sigma \aleph\left(\frac{x}{\omega}+\sigma\right) + \Sigma f(x+\varsigma\omega)\aleph(-\mu-\varsigma).$$

La première somme est composée de μ termes correspondants à μ valeurs consécutives de σ, et la seconde est une somme indéfinie, ς prenant une suite de valeurs positives à partir de zéro.

Telle est la solution générale de la question, solution que nous avons déjà donnée à propos de l'intégration générale des équations; comme il n'entre ici que des fonctions symétriques des racines de l'équation caractéristique (88), il n'y a pas lieu de considérer le cas où ces racines sont imaginaires ou multiples.

Autres formes des intégrales; propriétés des fonctions aleph. — Le système de relations (85) conduit encore à d'autres solutions; nous allons les déduire de ce qui précède, et particulièrement la solution ordinaire où les racines de l'équation caractéristique sont en évidence.

A cet effet, il faut recourir à la propriété fondamentale des fonctions aleph. Considérons un polynôme de μ termes élevé à la puissance ϖ et remplaçons dans le développement les coefficients par l'unité, nous aurons par définition une fonction aleph de μ éléments que nous indiquerons ainsi : $\aleph_\mu(\varpi)$. Jusqu'à présent, nous avons négligé l'indice μ qui marque le nombre d'éléments parce que ce nombre était toujours le même, mais dans la formation des fonctions aleph il est nécessaire de l'indiquer, car la fonction $\aleph_\mu(\varpi)$, d'après sa définition, est formée évidemment ainsi :

$$\aleph_\mu(\varpi) = \aleph_{\mu-1}(\varpi) + n\aleph_{\mu-1}(\varpi - 1) + n^2\aleph_{\mu-1}(\varpi - 2) + \ldots + n^\varpi,$$

et, si l'on remarque que la somme de tous les termes du second membre est $n\aleph_\mu(\varpi - 1)$, d'après l'expression elle-même, on a la relation fondamentale

$$\aleph_\mu(\varpi) - n\aleph_\mu(\varpi - 1) = \aleph_{\mu-1}(\varpi). \tag{93}$$

Dans cette notation la relation (74) s'écrit

$$\begin{aligned} &A_\mu \aleph_\mu(\varpi + \mu) + A_{\mu-1}\aleph_\mu(\varpi + \mu - 1) \\ &\quad + A_{\mu-2}\aleph_\mu(\varpi + \mu - 2) + \ldots + A_0\aleph_\mu(\varpi) = 0; \end{aligned}$$

nous mettons ici ϖ à la place de ν. La même relation (74) donne encore

$$\begin{aligned} &nA_\mu \aleph_\mu(\varpi + \mu - 1) + nA_{\mu-1}\aleph_{\mu-1}(\varpi + \mu - 2) \\ &\quad + nA_{\mu-2}\aleph_\mu(\varpi + \mu - 3) + \ldots + nA_0\aleph_\mu(\varpi - 1) = 0; \end{aligned}$$

retranchant cette égalité de la précédente et tenant compte de (93), il vient

$$\begin{aligned} &A_\mu \aleph_{\mu-1}(\varpi + \mu) + A_{\mu-1}\aleph_{\mu-1}(\varpi + \mu - 1) \\ &\quad + A_{\mu-2}\aleph_{\mu-1}(\varpi + \mu - 2) + \ldots + A_0\aleph_{\mu-1}(\varpi) = 0. \end{aligned}$$

La relation (74) a donc lieu aussi pour $\mu - 1$ éléments; on trouverait de même qu'elle a lieu pour $\mu - \nu$ éléments; par suite, on peut écrire

$$A_\mu \aleph_{\mu-\nu}(\varpi + \mu) + A_{\mu-1}\aleph_{\mu-\nu}(\varpi + \mu - 1) + \ldots + A_0\aleph_{\mu-\nu}(\varpi) = 0. \tag{94}$$

Quand on passera aux fonctions aleph négatives, on verra que les fonctions

$\aleph_{\mu-\nu}(-1)$ à $\aleph_{\mu-\nu}(-\mu+\nu+1)$ sont nulles; cela résulte de ce que nous avons dit plus haut, puisque le nombre d'éléments est $\mu-\nu$ au lieu de μ.

Pour en revenir à l'équation (83) et aux conditions (85), on peut prendre généralement pour valeurs de $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ les fonctions $\aleph_{\mu-\nu}(-\mu+\nu)$, $\aleph_{\mu-\nu}(-\mu+\nu-1)$, $\aleph_{\mu-\nu}(-\mu+\nu-2)$, ...; la somme indéfinie des égalités (84) se réduit à

$$\begin{aligned}&\Sigma f(x+\varsigma\omega)\,\aleph(-\mu+\nu-\varsigma)\\&=\aleph(-\mu+\nu)A_0\,\varphi(x)+[\aleph(-\mu+\nu)A_1+\aleph(-\mu+\nu-1)A_0]\,\varphi(x+\omega)+\ldots\\&\quad+[\aleph(-\mu+\nu)A_\nu+\aleph(-\mu+\nu-1)A_{\nu-1}+\ldots+\aleph(-\mu)A_0]\,\varphi(x+\nu\omega);\end{aligned}$$

tous les autres coefficients des fonctions φ sont nuls d'après la remarque précédente. Il n'y a pas ici d'inconvénient à supprimer l'indice inférieur $\mu-\nu$ des fonctions $\aleph$ pour simplifier l'écriture. Au lieu des fonctions aleph négatives qui entrent dans le second membre de cette égalité, on peut introduire les fonctions aleph positives; d'après (94), en donnant à ϖ des valeurs convenables, on obtient avec un changement de signe

$$(95)_1\quad\left\{\begin{aligned}&[A_\mu\,\aleph(\nu)+A_{\mu-1}\,\aleph(\nu-1)+\ldots+A_{\mu-\nu}\,\aleph(0)]\,\varphi(x)\\&\quad+[A_\mu\,\aleph(\nu-1)+A_{\mu-1}\,\aleph(\nu-2)+\ldots+A_{\mu-\nu+1}\,\aleph(0)]\,\varphi(x+\omega)+\ldots\\&\quad+[A_\mu\,\aleph(1)+A_{\mu-1}\,\aleph(0)]\,\varphi(x+\overline{\nu-1}\,\omega)+A_\mu\,\aleph(0)\,\varphi(x+\nu\omega).\end{aligned}\right.$$

En ordonnant par rapport aux fonctions φ, on a donc

$$(95)\quad\left\{\begin{aligned}&-\Sigma f(x+\varsigma\omega)\,\aleph(-\mu+\nu-\varsigma)\\&\quad=A_\mu\varphi(x)\,\aleph(\nu)+[A_{\mu-1}\varphi(x)+A_\mu\varphi(x+\omega)]\,\aleph(\nu-1)+\ldots\\&\qquad+[A_{\mu-\nu}\varphi(x)+A_{\mu-\nu+1}\varphi(x+\omega)+\ldots+A_\mu\varphi(x+\nu\omega)]\,\aleph(0);\end{aligned}\right.$$

le second membre de cette égalité contient $\nu+1$ fonctions aleph à $\mu-\nu$ éléments, et leurs coefficients sont autant de quantités inconnues dont la première $A_\mu\,\varphi(x)$ est celle que nous voulons particulièrement obtenir. Il faut donc $\nu+1$ relations semblables que l'on formera en composant des fonctions aleph à $\mu-\nu$ éléments différents; on aura ainsi $\nu+1$ équations du premier degré, d'où l'on tirera

$$A_\mu\,\varphi(x).$$

Pour former ces $\nu+1$ relations, on pourrait encore prendre p fonctions aleph de $\mu-\nu$ éléments, et $\nu+1-p$ formées d'un plus grand nombre d'éléments.

1° Cela posé, considérons le cas où $\mu-\nu=1$; les fonctions aleph sont à

un seul élément, : elles sont alors des puissances d'une racine de l'équation caractéristique (88); supposons inégales toutes les racines de cette équation. On a

$$\aleph(\varpi) = n^{\varpi},$$

et le premier membre de (95) est

$$\begin{aligned} -[f(x)\aleph(-1) + f(x+\omega)\aleph(-2) + f(x+2\omega)\aleph(-3) + \ldots] \\ = -\frac{1}{n}\left[f(x) + f(x+\omega)\frac{1}{n} + f(x+2\omega)\frac{1}{n^2} + \ldots\right] \\ = -n^{\frac{x}{\omega}-1}\left[f(x)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{x}{\omega}} + f(x+\omega)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{x}{\omega}+1} + f(x+2\omega)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{x}{\omega}+2} + \ldots\right]. \end{aligned}$$

D'après (78), en faisant $\mu = 1$ dans cette formule, on a pour la somme ci-dessus

$$n^{\frac{x}{\omega}-1}\sum f(x)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{x}{\omega}}.$$

Ainsi la résolution du système d'équations représenté par (95) donne, en prenant successivement chacune des racines de la caractéristique pour former les μ équations du système

$$(96) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{A_\mu} \frac{\mathfrak{D}\left[n_1^0 . n_2^1 \ldots n_{\mu-1}^{\mu-2} . n_\mu^{\frac{x}{\omega}-1}\sum f(x)\left(\frac{1}{n_\mu}\right)^{\frac{x}{\omega}}\right]}{\mathfrak{D}\left[n_1^0 . n_2^1 \ldots n_{\mu-1}^{\mu-2} . n_\mu^{\mu-1}\right]}.$$

Si l'on désigne par N le dénominateur et par N_1, N_2, ..., N_μ les déterminants mineurs du numérateur développé par rapport aux éléments formés des sommes Σ, on obtient

$$(96)' \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x) = \frac{(-1)^{\mu-1}}{A_\mu N}\Bigg[& N_1 n_1^{\frac{x}{\omega}-1}\sum f(x)\left(\frac{1}{n_1}\right)^{\frac{x}{\omega}} - N_2 n_2^{\frac{x}{\omega}-1}\sum f(x)\left(\frac{1}{n_2}\right)^{\frac{x}{\omega}} + \ldots \\ & + (-1)^{\mu-1} N_\mu n_\mu^{\frac{x}{\omega}-1}\sum f(x)\left(\frac{1}{n_\mu}\right)^{\frac{x}{\omega}}\Bigg]. \end{aligned} \right.$$

Enfin il est facile de passer de cette forme de la solution à celle sous laquelle on la présente ordinairement.

Le dénominateur N s'annule, si deux éléments n_ρ et n_σ sont égaux, il est

donc égal au produit des différences $n_\rho - n_\sigma$, à un facteur près. Désignons par Π ce produit, nous aurons

$$\frac{N}{N_\rho} = (-1)^{\mu-1}\,\Pi(n_\rho - n_\sigma),$$

σ prenant toutes les valeurs de 1 à μ, sauf ρ. En effet, développant N par rapport à n_ρ, nous aurons, R étant un déterminant mineur,

$$N = (-1)^{\rho-1}\left[n_\rho^0 R_1 - \ldots + (-1)^{\mu-1} n_\rho^{\mu-1} R_\mu\right],$$

et pour N_ρ, S étant aussi un déterminant mineur,

$$N_\rho = (-1)^{\rho-1}\left[n_\rho^0 S_1 - \ldots + (-1)^{\mu-2} n_\rho^{\mu-2} S_{\mu-1}\right].$$

Or le degré de R_μ est le même que celui de S_1, c'est-à-dire $\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}$, les autres R_1 à $R_{\mu-1}$ sont d'un degré supérieur et ceux de S_2 à $S_{\mu-1}$ d'un degré inférieur; il en résulte que, si l'on fait nuls tous les éléments n_σ, R_μ et S_1 deviennent identiques et leur rapport est l'unité, les autres termes sont nuls; on a donc, pour la valeur du rapport en question,

$$(-1)^{\mu-1} n_\rho^{\mu-1},$$

ce qui est conforme à l'expression ci-dessus. Nous avons donc

$$(96)'' \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x) = \frac{1}{A_\mu}\Bigg[& \frac{n_1^{\frac{x}{\omega}-1}}{\Pi(n_1 - n_\sigma)} \sum fx\left(\frac{1}{n_1}\right)^{\frac{x}{\omega}} - \ldots \\ & + (-1)^{\mu-1} \frac{n_\mu^{\frac{x}{\omega}-1}}{\Pi(n_\mu - n_\sigma)} \sum fx\left(\frac{1}{n_\mu}\right)^{\frac{x}{\omega}} \Bigg]. \end{aligned} \right.$$

Wronski a fait connaître l'expression (96)′ dans la *Critique des fonctions génératrices* et n'en a donné qu'une vérification.

Pour retrouver la démonstration précédente, nous avons dû suivre une marche inverse; il est inutile de la reproduire : il serait d'ailleurs facile de la rétablir maintenant.

2° Admettons maintenant que l'équation caractéristique (88) ait $\nu + 1$ racines distinctes $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, n$, cette dernière n étant une racine multiple d'ordre $\mu - \nu$. La relation (95) ne donne lieu qu'à $\nu + 1$ équations dis-

tinctes, en prenant des fonctions aleph à un seul élément, nous aurons les $\mu - \nu - 1$ autres relations en prenant les fonctions aleph successivement à $2, 3, \ldots, \mu - \nu$ éléments formés de la racine multiple.

Pour calculer ces fonctions aleph, considérons une fonction de ρ éléments identiques $\aleph_\rho(\varpi)$. Cette fonction est n^ϖ multipliée par un facteur représentant le nombre de termes du développement de la puissance $\varpi^{\text{ième}}$ d'un polynôme de ρ termes; on a donc

$$(97) \qquad \aleph_\rho(\varpi) = \frac{\rho^{\varpi|1}}{1^{\varpi|1}} n^\varpi = \frac{(\varpi+1)^{\rho-1|1}}{1^{\rho-1|1}} n^\varpi,$$

et, pour les fonctions négatives,

$$(97)' \qquad \aleph_\rho(-\rho) = -\left(\frac{-1}{n}\right)^\rho, \quad \aleph_\rho(-\rho-\varpi) = -\frac{\rho^{\varpi|1}}{1^{\varpi|1}}\left(\frac{-1}{n}\right)^{\rho+\varpi}.$$

Portant ces valeurs dans (95), en y faisant $\mu - \nu = \rho$ et mettant ς pour ϖ, on a

$$-\sum f(x+\varsigma\omega)\,\aleph_\rho(-\rho-\varsigma) = \sum f(x+\varsigma\omega)\frac{\rho^{\varsigma|1}}{1^{\varsigma|1}}\left(\frac{-1}{n}\right)^{\rho+\sigma}$$

ou

$$(-1)^\rho n^{\frac{x}{\omega}-\rho}\left[f(x)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{x}{\omega}} + \frac{\rho}{1} f(x+\omega)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{x}{\omega}+1} \right.$$
$$\left. + \frac{\rho(\rho+1)}{1.2} f(x+2\omega)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{x}{\omega}+1} + \ldots\right] = n^{\frac{x}{\omega}-\rho}\sum^\rho fx\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{x}{\omega}};$$

d'après (78), en faisant $\mu = \rho$ dans cette formule, et par suite

$$(98) \quad \begin{cases} n^{\frac{x}{\omega}-\rho}\sum^\rho f(x)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{x}{\omega}} \\ = A_\mu\,\varphi(x)\dfrac{\rho^{\mu-\rho|1}}{1^{\mu-\rho|1}} n^{\mu-\rho} + [A_{\mu-1}\,\varphi(x) + A_\mu\,\varphi(x+\omega)]\dfrac{\rho^{\mu-\rho-1|1}}{1^{\mu-\rho-1|1}} n^{\mu-\rho-1} + \ldots \\ + [A_\rho\,\varphi(x) + A_{\rho+1}\,\varphi(x+\omega) + \ldots + A_\mu\,\varphi(x+\overline{\mu-\rho}\,\omega)], \end{cases}$$

$\sum^\rho$ est une intégrale multiple d'ordre ρ.

Ainsi aux $\nu+1$ équations linéaires de la forme (95) que nous avons trouvées plus haut il faut joindre les suivantes, obtenues en faisant

$\rho = 2, 3, \ldots, \mu - \nu$ dans (98),

$$n^{\frac{x}{\omega}-2}\sum^2 f(x)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{x}{\omega}}$$
$$= A_\mu\,\varphi(x)\,\frac{\mu-1}{1}\,n^{\mu-2} + [A_{\mu-1}\,\varphi(x) + A_\mu\,\varphi(x+\omega)]\,\frac{\mu-2}{1}\,n^{\mu-3} + \ldots,$$

$$n^{\frac{x}{\omega}-3}\sum^3 f(x)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{x}{\omega}}$$
$$= A_\mu\,\varphi(x)\,\frac{(\mu-2)^{2|1}}{1.2}\,n^{\mu-3} + [A_{\mu-1}\,\varphi(x) + A_\mu\,\varphi(x+\omega)]\,\frac{(\mu-3)^{2|1}}{1.2}\,n^{\mu-4} + \ldots,$$

....,

$$n^{\frac{x}{\omega}-\mu+\nu}\sum^{\mu-\nu} f(x)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{x}{\omega}}$$
$$= A_\mu\,\varphi(x)\,\frac{(\mu-\nu)^{\nu|1}}{1^{\nu|1}}\,n^{\mu-\nu} + [A_{\mu-1}\,\varphi(x) + A_\mu\,\varphi(x+\omega)]\,\frac{(\mu-\nu-1)^{\nu|1}}{1^{\nu|1}}\,n^{\mu-\nu-1} + \ldots;$$

le second membre de la première égalité a $\mu - 1$ termes, celui de la seconde $\mu - 2$, etc., et celui de la dernière $\nu + 1$.

On formerait sans difficulté les déterminants analogues à ceux que nous avons désignés par $N, N_1, N_2, \ldots, N_\mu$ dans (96)′, et l'on aurait pour la solution cherchée, en conservant la même notation,

$$(99)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(x) = \frac{(-1)^{\mu-1}}{A_\mu N}\Bigg[& N_1\,n^{\frac{x}{\omega}-1}\sum f(x)\left(\frac{1}{n_1}\right)^{\frac{x}{\omega}} - \ldots \\ & + (-1)^{\nu-1} N_\nu\,n_\nu^{\frac{x}{\omega}-1}\sum f(x)\left(\frac{1}{n_\nu}\right)^{\frac{x}{\omega}} \\ & + (-1)^{\nu} N_{\nu+1}\,n^{\frac{x}{\omega}-1}\sum f(x)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{x}{\omega}} \\ & + (-1)^{\nu+1} N_{\nu+2}\,n^{\frac{x}{\omega}-2}\sum^2 f(x)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{x}{\omega}} + \ldots \\ & + (-1)^{\mu-1} N_\mu\,n^{\frac{x}{\omega}-\mu+\nu}\sum^{\mu-\nu} f(x)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{x}{\omega}}\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

Pour ce qui concerne les constantes arbitraires, la dernière intégrale contient un polynôme de la forme

$$M_{\nu+1}\,x^{\mu-\nu} + M_{\nu+2}\,x^{\mu-\nu-1} + \ldots + M_\mu,$$

l'avant-dernière, le polynôme

$$M'_{\nu+1}x^{\mu-\nu-1} + M'_{\nu+2}x^{\mu-\nu-2} + \ldots + M'_{\mu-1},$$

de telle sorte que la différence du premier polynôme reproduise le second. Il en serait de même pour le polynôme de l'intégrale précédente, et ainsi de suite jusqu'aux $\nu + 1$ premières intégrales, qui, étant des intégrales simples, ne doivent contenir qu'une constante chacune. Ces constantes sont périodiques, comme cela doit être.

Nous devrions considérer le cas où un certain nombre de racines de la caractéristique sont imaginaires; on grouperait ces racines, soit toutes ensemble, soit par couples ou autrement pour faire disparaître les quantités imaginaires. Mais il est préférable de recourir à la première solution (92) où il n'entre que des fonctions symétriques des racines : c'est là la solution fondamentale, car, pour un ordre un peu élevé de l'équation différentielle, la résolution de l'équation caractéristique offre des difficultés. Bien plus, dans le cas d'une équation contenant plusieurs variables indépendantes, l'équation caractéristique ayant des coefficients variables, à cause des quantités arbitraires que ceux-ci contiennent, les racines sont d'une nature indéterminée, et il faut nécessairement avoir recours aux fonctions symétriques.

Nous ne nous arrêterons pas au cas des équations de différences à une ou plusieurs variables : nous avons traité suffisamment cette question, qui se déduit d'ailleurs très simplement de ce qui précède. Nous ferons seulement remarquer que la solution (92) donne la véritable origine des fonctions exponentielles dans l'intégration des équations linéaires à coefficients constants; la marche que nous avons suivie, et dont nous n'avons trouvé l'indication nulle part, est la marche naturelle; elle est préférable aux procédés connus qui doivent varier dans chaque cas différent : celui des racines réelles, des racines imaginaires ou des racines multiples de la caractéristique. La solution (92) a encore l'avantage de conduire à des conséquences importantes; mais, avant de les déduire, il convient d'examiner comment on obtient directement l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants, bien que celle-ci provienne également de ce qui est donné plus haut.

Cas des équations différentielles. — Faisons usage de la notation des dérivées pour simplifier l'écriture. Soit l'équation

$$(100)\qquad f(x) = C_0\,\varphi(x) + C_1\,\varphi'(x) + C_2\,\varphi''(x) + \ldots + C_\mu\,\varphi^{(\mu)}(x);$$

pour obtenir des relations d'où nous tirerons $\varphi(x)$ en fonction de $f(x)$, il faut ici prendre les dérivées successives des deux membres, et nous aurons, comme plus haut, à considérer les fonctions aleph de l'équation caractéristique

$$C_\mu m^\mu + C_{\mu-1} m^{\mu-1} + \ldots + C_1 m + C_0 = 0. \tag{101}$$

Nous aurons donc pour solution, analogue à (86),

$$\varphi(x) = \frac{1}{C_0} \sum f^{(\varsigma)}(x) \aleph(-\mu - \varsigma); \tag{102}$$

cette somme est indéfinie et $f^{(\varsigma)}(x)$ est la $\varsigma^{\text{ième}}$ dérivée de la fonction $f(x)$.

Pour obtenir la solution complète, supposons nulle la fonction $f(x)$ et développons $\varphi(x)$ par la formule de Maclaurin, ainsi que ses dérivées; nous avons alors

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{x}{1}\varphi'(0) + \frac{x^2}{1.2}\varphi''(0) + \ldots,$$
$$\varphi'(x) = \varphi'(0) + \frac{x}{1}\varphi''(0) + \frac{x^2}{1.2}\varphi'''(0) + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et, substituant ces valeurs de $\varphi(x)$ et de ses μ premières dérivées dans (100), on a les relations

$$0 = C_0\varphi(0) + C_1\varphi'(0) + C_2\varphi''(0) + \ldots + C_\mu\varphi^{(\mu)}(0),$$
$$0 = C_0\varphi'(0) + C_1\varphi''(0) + C_2\varphi'''(0) + \ldots + C_\mu\varphi^{(\mu+1)}(0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces relations sont évidemment satisfaites par les fonctions aleph positives des racines de l'équation caractéristique (101); par suite, on a pour solution, en supposant $f(x) = 0$,

$$\varphi(x) = \aleph(0) + \frac{x}{1}\aleph(1) + \frac{x^2}{1.2}\aleph(2) + \ldots. \tag{103}$$

Mais les relations précédentes comportent une indétermination en ce qu'elles ne peuvent faire connaître que μ des fonctions $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, ...: donc la solution comporte μ quantités arbitraires.

Soit Q une de ces quantités, l'expression (103) multipliée par Q est encore une solution, et, en ajoutant μ expressions semblables, on aura la solution complète.

L'intégration de l'équation proposée (100) est ainsi

$$(104)\qquad \varphi(x) = \sum_{\mu} Q_{\nu}\left[\sum \frac{x^{\sigma}}{1^{\sigma|1}} \aleph(\sigma)\right] + \frac{1}{C_0}\sum f^{(\varsigma)}(x)\,\aleph(-\mu-\varsigma);$$

la première somme Σ_{μ} est composée de μ termes correspondants à μ valeurs différentes de la constante Q_{ν}; les autres sommes sont indéfinies. Nous avons déjà trouvé cette solution qui est utilisable, quelle que soit la nature des racines de l'équation caractéristique, puisqu'il n'y entre que des fonctions symétriques des racines : il faut seulement dans les applications que les séries représentées par les sommes indéfinies soient convergentes, et il est toujours possible de ramener ces séries à remplir cette condition.

Si, au lieu des fonctions aleph, on veut n'introduire dans la solution que les racines de l'équation (101), en supposant toutes ces racines différentes, on a à effectuer la somme de la série

$$f(x) + f'(x)\frac{1}{m} + f''(x)\frac{1}{m^2} + \ldots,$$

qui provient de (102), puisque les fonctions aleph ne sont qu'à un seul élément. Or, d'après la formule (82), en y faisant $\mu = 1$, on a

$$\int f(x)\,F(x)\,dx = f(x)\int F x\,dx - \frac{df(x)}{dx}\int^2 F(x)\,dx^2 + \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\int^3 F(x)\,dx^3 - \ldots,$$

et cette expression s'identifie à la série précédente en faisant $F(x) = e^{-mx}$; on a donc

$$-me^{mx}\int f(x)e^{-mx}\,dx = f(x) + \frac{df(x)}{dx}\,\frac{1}{m} + \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\,\frac{1}{m^2} + \ldots.$$

S'il existait des racines multiples, on opérerait d'une façon analogue en faisant usage de la même formule (82). Enfin, dans le cas de racines imaginaires, il faut grouper les racines pour faire disparaître les quantités imaginaires; ce groupement peut se faire par couples de racines conjuguées, comme on le fait ordinairement, ou par la réunion de toutes les racines imaginaires.

Quoi qu'il en soit, ces groupements reviennent toujours à la formation de fonctions symétriques; dans le premier cas il faut recourir aux sinus ou cosinus du cercle et dans le second aux sinus et cosinus des ordres supérieurs, toutes fonctions symétriques transcendantes.

Fonctions symétriques. — Avant de passer à ces calculs, il convient de

dire quelques mots des fonctions symétriques en général. Considérons les fonctions symétriques de μ quantités ; on sait que toute fonction de ce genre est exprimable au moyen de μ fonctions symétriques de ces quantités. En particulier, si l'on forme l'équation algébrique dont ces μ quantités sont racines, toute fonction symétrique pourra être obtenue au moyen des μ coefficients. D'autre part, nous avons vu que toute fonction déterminée par une équation aux différences totales ou partielles, linéaire et à coefficients constants est une fonction symétrique des racines de la caractéristique, en disposant convenablement des constantes ou fonctions arbitraires. Il est donc possible en principe d'exprimer toute fonction symétrique au moyen de certaines intégrales ; de cette manière, tout calcul de fonction symétrique peut se ramener à des intégrations ou à des résolutions d'équations linéaires, puisque les intégrations considérées se réduisent en dernier lieu à une simple résolution d'équations du premier degré, ainsi que nous l'avons vu.

Il se présente alors deux problèmes principaux relatifs aux fonctions symétriques : 1° calculer une fonction donnée explicitement ou implicitement au moyen de ses μ éléments ; 2° calculer cette fonction au moyen de μ fonctions symétriques données et formées avec ces éléments.

Par exemple, dans le premier cas, si

$$A_\mu n^\mu + A_{\mu-1} n^{\mu-1} + \ldots + A_1 n + A_0 = 0 \tag{105}$$

est la relation donnée entre un des μ éléments $n_1, n_2, \ldots, n_\mu$ et les fonctions symétriques $A_{\mu-1}, A_{\mu-2}, \ldots, A_0$; A_μ étant un facteur arbitraire, l'expression des coefficients est donnée par la résolution des équations linéaires dont l'une d'elles est (105) ; par suite, on a pour A_λ

$$A_\lambda = -A_\mu \frac{\mathfrak{S}\left[n_1^0 . n_2^1 \ldots n_{\lambda+1}^\mu \ldots n_\mu^{\mu-1}\right]}{\mathfrak{S}\left[n_1^0 . n_2^1 \ldots n_{\lambda+1}^\lambda \ldots n_\mu^{\mu-1}\right]}. \tag{105'}$$

Les coefficients A de l'équation précédente jouent un rôle important dans l'étude des fonctions symétriques, mais nous avons vu aussi que les fonctions aleph sont importantes à considérer ; il y a lieu de croire que cette dénomination que leur a donnée Wronski provient de l'utilité qu'il leur a reconnue. Examinons leurs principales propriétés.

Fonctions aleph. — Nous avons donné plus haut leur définition qui se traduit par (93). Wronski donne une autre forme à cette relation fondamentale ; désignons par N l'ensemble de tous les éléments n, (93) pourra s'écrire

$$\aleph_N(\varpi) - \aleph_{N-n_p}(\varpi) = n_p \aleph_N(\varpi - 1) ;$$

on a de même

$$\aleph_N(\varpi) - \aleph_{N-n_q}(\varpi) = n_q \aleph_N(\varpi - 1)$$

et, retranchant cette égalité de la précédente, on obtient

$$(106) \qquad \aleph_{N-n_q}(\varpi) - \aleph_{N-n_p}(\varpi) = (n_p - n_q)\aleph_N(\varpi - 1).$$

L'expression des fonctions aleph au moyen des coefficients de l'équation (105) est donnée par la relation (74), et les relations initiales sont (74)'.

Nous avons démontré que, la relation (74), qui existe pour les μ éléments, étant admise, on en déduit une relation semblable entre un nombre d'éléments inférieur à μ, (94); or, pour un seul élément, on obtient l'égalité (105) qui est exacte : on doit donc en conclure que la relation (74), ou (94), est également exacte. Il serait d'ailleurs facile de donner une démonstration directe de (74).

Nous avons aussi donné l'expression immédiate des fonctions aleph au moyen des coefficients A; cette expression est (75), et nous avons considéré les fonctions aleph négatives que nous avons provisoirement désignées par λ : (85), (87) et (89); il nous reste maintenant à trouver l'expression des fonctions aleph au moyen de leurs seuls éléments. A cet effet, nous avons remarqué que la relation (74) constituait une équation de différences de la forme de (83), en supposant $f(x) = 0$; nous en déduisons donc immédiatement, d'après $(95)_1$,

$$\begin{aligned} n^{\varpi-1}C &= A_\mu \aleph(\varpi) n^{\mu-1} + [A_{\mu-1}\aleph(\varpi) + A_\mu \aleph(\varpi+1)]n^{\mu-2} + \ldots \\ &+ [A_1 \aleph(\varpi) + A_2 \aleph(\varpi+1) + \ldots + A_\mu \aleph(\varpi + \mu - 1)]n^0, \end{aligned}$$

C étant une constante que l'on détermine en faisant $\varpi = -\mu + 1$, ce qui donne

$$A_\mu n^\mu = C.$$

Posons

$$(107) \qquad \begin{cases} Z_\mu = A_\mu \aleph(\varpi), \\ Z_{\mu-1} = A_{\mu-1}\aleph(\varpi) + A_\mu \aleph(\varpi+1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Z_1 = A_1 \aleph(\varpi) + A_2 \aleph(\varpi+1) + \ldots + A_\mu \aleph(\varpi + \mu - 1), \end{cases}$$

et multiplions les deux membres de la relation précédente par n, nous avons

$$(107)' \qquad A_\mu n^{\varpi+\mu} = Z_\mu n^\mu + Z_{\mu-1} x^{\mu-1} + \ldots + Z_1 n;$$

résolvant maintenant le système d'équations que l'on obtient en mettant pour n ses μ valeurs dans (107)', il vient

$$(108) \qquad Z_\nu = A_\mu \frac{\text{Ⓓ}[n_1^1 . n_2^2 \ldots n_\nu^{\varpi+\mu} \ldots n_\mu^\mu]}{\text{Ⓓ}[n_1^1 . n_2^2 \ldots n_\nu^\nu \ldots n_\mu^\mu]}.$$

Si nous comparons (107) et (108), nous avons une suite de relations, dont la première donne

$$(108)' \qquad \aleph(\varpi) = \frac{\text{Ⓢ}\left[n_1^1 . n_2^2 \ldots n_\mu^{\varpi+\mu}\right]}{\text{Ⓢ}\left[n_1^1 . n_2^2 \ldots n_\mu^{\mu}\right]};$$

c'est la relation que nous voulions obtenir. On trouverait aisément d'autres démonstrations de cette expression ; celle-ci a l'avantage d'indiquer l'origine des fonctions symétriques Z dont nous avons déjà fait usage dans l'intégration des équations aux différences finies. Dans le cas d'équations différentielles, la quantité $n^{\varpi+\mu}$ de $(107)'$ serait remplacée par une exponentielle de la forme e^{mx}.

On pourrait encore déduire $(105)'$ de (108) en faisant $\varpi = 1$ dans cette dernière expression. Enfin les fonctions aleph peuvent se mettre sous une forme analogue à $(96)''$; toutes les expressions trouvées pour ces fonctions ne sont que des transformations de l'expression qui a servi à les définir.

D'après $(108)'$, on voit que, pour $\varpi = 0$, on a

$$\aleph(0) = 1,$$

ce qui justifie cette valeur que nous avions adoptée arbitrairement jusqu'ici.

Telles sont les principales propriétés des fonctions aleph ; à cause de leur relation avec les coefficients de l'équation (105), on conçoit qu'elles puissent servir à la résolution des équations algébriques. Wronski a en effet donné une méthode spéciale, fondée sur leurs propriétés, pour le calcul numérique des racines [1].

Nous venons de voir que l'étude des fonctions aleph conduit en réalité à l'intégration des équations aux différences finies, linéaires, et à coefficients constants; Wronski considère encore, comme nous l'avons déjà dit, une autre sorte de fonctions aleph, qu'il nomme *fonctions aleph générales* et qui sont définies par un système d'équations linéaires de la forme (59). Autrement, au lieu de supposer constants les coefficients de la relation (74) des fonctions aleph ordinaires, on les suppose variables en même temps que la quantité ν sous le signe $\aleph$. Si ces coefficients sont des fonctions algorithmiques de la variable, les propriétés de ces fonctions aleph conduisent à

---

(1) Cette méthode est au fond la même que celle de D. Bernoulli, mais elle se présente ici sous sa véritable forme, et elle subsiste encore dans le cas des fonctions *aleph générales* servant alors à la résolution des *équations de faculté*. Ces équations sont les équations caractéristiques des équations différentielles linéaires à coefficients variables, et la résolution des équations de facultés équivaut à l'intégration de ces équations différentielles.

l'intégration des équations aux différences finies, linéaires et à coefficients variables, et les expressions contiennent des facultés au lieu d'exponentielles; Wronski en donne un exemple vers la fin de sa *Critique des fonctions génératrices* [1]. Mais, si les coefficients sont variables sans être des fonctions algorithmiques d'une quantité, les fonctions aleph ne peuvent recevoir une expression générale ou algébrique et elles ne peuvent être calculées que successivement ou par des expressions telles que (61), (65), (69) ou (71) avec les conditions correspondant aux indices. Dans ce cas les fonctions aleph ne présentent que des expressions particulières ou arithmétiques. Cependant si les coefficients varient suivant certaines lois déterminées non algébriques, les fonctions dont il s'agit présentent des propriétés spéciales qui ont été utilisées par Wronski pour fonder sa Théorie des Nombres.

Autres fonctions symétriques. — Ainsi les fonctions aleph sont des fonctions très importantes qui méritent une étude particulière et offrent des propriétés plus simples et plus intéressantes, comme fonctions symétriques, que les fonctions de la forme suivante

$$\Sigma n_1^{x_1} n_2^{x_2} n_3^{x_3} \ldots n_\mu^{x_\mu}, \tag{109}$$

que l'on a étudiées; l'expression de ces dernières est très compliquée et leur calcul présente de réelles difficultés pour un ordre tant soit peu élevé. Ce sont ces difficultés mêmes qui ont conduit à la construction de Tables de coefficients, dont le calcul est très pénible; ces Tables nous paraissent être insuffisantes pour certaines applications.

Heureusement, nous n'avons encore rencontré ce genre de fonctions symétriques que dans le cas très particulier où les quantités n_1, n_2, n_3, ... sont des racines de l'unité; ce cas se présente dans l'étude des sinus des ordres supérieurs dont nous sommes amené à parler; néanmoins, nous avons fait une étude assez complète des fonctions (109). Comme il serait trop long de la reproduire en entier, nous nous contenterons de donner les indications principales.

D'après ce que nous avons exposé, la question peut être traitée par les moyens généraux applicables aux fonctions symétriques ou par des procédés particuliers.

---

[1] Dans un Mémoire publié par l'*Association française pour l'avancement des Sciences* (Congrès de Blois, 1884), nous avons donné l'intégration de ces équations aux différences finies, et même aux différences partielles, en appliquant la méthode dont nous venons de faire usage pour les équations différentielles à coefficients constants. Nous devons ajouter que cette même méthode s'applique à l'intégration des équations aux dérivées totales ou partielles linéaires et à coefficients variables.

1° Le problème se ramène à l'intégration d'une équation aux différences partielles, linéaires et à coefficients constants qu'il serait facile de former.

En intégrant cette équation par les formules (81) et (82) de la méthode générale d'intégration ; la solution dépendrait de μ fonctions arbitraires qui sont des fonctions symétriques de même forme que la fonction proposée, mais contenant en réalité un élément de moins.

Il faudrait, pour achever les calculs, obtenir par le même procédé les expressions des fonctions symétriques d'un nombre inférieur d'éléments, jusqu'aux sommes de puissances semblables, de manière à ne laisser subsister dans la solution définitive que des fonctions symétriques de composition connue. La solution dépend donc de l'élimination d'une suite de quantités linéaires ; nous sommes ainsi ramené aux calculs qui servent de base à l'intégration des équations considérées plus haut.

2° Les fonctions symétriques (109) dépendent en effet de la résolution de systèmes complexes d'équations linéaires qu'il est encore facile d'établir directement ; ces équations sont immédiatement résolubles par agrégats et la solution définitive dépend de produits d'agrégats que nous avons appris à former.

Nous ne pouvons reproduire ici tous ces calculs, assez longs d'ailleurs, il suffit de faire remarquer que ces solutions, en quelque sorte primitives, sont fondamentales en ce qu'elles s'appuient sur des principes nécessaires qui font connaître la nature même des fonctions dont il s'agit.

3° On peut aussi parvenir au résultat par des procédés particuliers. Par exemple, d'après un théorème dû à M. Borchardt, les fonctions symétriques (109) sont les coefficients d'un développement d'une certaine fonction ; or Wronski a donné, dans la seconde section de la Technie, l'expression générale de développements qui s'appliquent à la fonction de Borchardt, et, sans effectuer les calculs, il est facile de reconnaître que le résultat comporte encore des agrégats composés comme dans les solutions précédentes.

4° Le procédé donné dans les Ouvrages spéciaux [1] dépend de la considération des nombres de groupes d'éléments dont peut être composée la fonction cherchée (109).

Soient λ_1 un nombre de groupes d'un seul élément, λ_2 un nombre de groupes de deux éléments, etc., nombres de groupes dont peut être formée la fonction, le nombre total des éléments des groupes possibles sera

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \ldots + \mu\lambda_\mu = \mu, \tag{110}$$

---

[1] On peut consulter l'*Algèbre supérieure* de M. Serret, t. I, p. 454.

et le nombre de groupements différents sera

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_\mu = \nu. \tag{110'}$$

De plus, soient $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\alpha$ les sommes des exposants de chacun des groupes de α éléments, au nombre de λ_α, et soit S_σ la somme des puissances semblables des éléments correspondant à σ, somme de leurs exposants que nous supposons provisoirement tous inégaux ; considérons le produit Π_α

$$\Pi_\alpha S_{\sigma_1} S_{\sigma_2} \ldots S_{\sigma_\alpha},$$

en donnant à α, comme indice de λ, toutes les valeurs comprises entre 1 et μ et satisfaisant à (110) pour des valeurs données de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$, et faisons toutes les permutations des exposants qui font acquérir à ce produit des valeurs distinctes ; la somme de tous ces produits, fonction symétrique de $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$, est

$$\operatorname{Agr}(\Pi_\alpha S_{\sigma_1} S_{\sigma_2} \ldots S_{\sigma_\alpha}), \tag{111}$$

et le nombre de termes de cette somme, d'après le nombre des permutations, est

$$\mathfrak{N} = \frac{1^{\mu|1}}{(1^{1|1})^{\lambda_1}(1^{2|1})^{\lambda_2} \ldots (1^{\mu|1})^{\lambda_\mu} 1^{\lambda_1|1} 1^{\lambda_2|1} \ldots 1^{\lambda_\mu|1}}. \tag{111'}$$

Cela posé, la fonction symétrique cherchée a pour expression

$$\operatorname{Agr}\left[(-1)^{\mu-\nu}(1^{0|1})^{\lambda_1}(1^{1|1})^{\lambda_2}(1^{2|1})^{\lambda_3} \ldots (1^{\mu-1|1})^{\lambda_\mu} \operatorname{Agr}(\Pi_\alpha S_{\sigma_1} S_{\sigma_2} \ldots S_{\sigma_\alpha})\right].$$

Pour le vérifier, il suffirait de voir que si cette expression est vraie pour une valeur de μ, elle le sera encore pour la valeur $\mu + 1$.

Nous avons supposé tous les exposants $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ inégaux, si nous admettons maintenant qu'il y en ait ϖ_1 égaux entre eux, ϖ_2 autres égaux entre eux et différents des premiers, etc., pour ne pas tenir compte des répétitions produites par ces exposants égaux, les nombres ϖ étant indépendants des groupes formés arbitrairement, il faut diviser l'expression précédente par le produit des factorielles de la forme $1^{\varpi|1}$, et l'on a définitivement

$$\left\{\begin{aligned} &\Sigma n_1^{x_1} n_2^{x_2} \ldots n_\mu^{x_\mu} \\ &\quad = \frac{1}{1^{\varpi_1|1} 1^{\varpi_2|1} \ldots} \operatorname{Agr}\left[(-1)^{\mu-\nu}(1^{0|1})^{\lambda_1}(1^{1|1})^{\lambda_2} \ldots (1^{\mu-1|1})^{\lambda_\mu}. \operatorname{Agr}(\Pi_\alpha S_{\sigma_1} S_{\sigma_2} \ldots S_{\sigma_\alpha})\right]. \end{aligned}\right. \tag{112}$$

avec les conditions (110) et (110)'.

On pourrait déduire une autre expression de celle-ci en substituant aux

sommes S leurs valeurs en fonction des coefficients A de l'équation (105), le produit Π_α s'exprimant facilement au moyen d'un agrégat de ces coefficients, on en tirerait ensuite l'expression des coefficients qui figurent dans les Tables de fonctions symétriques.

Mais on doit considérer (112) comme l'expression fondamentale des fonctions symétriques (109) : c'est d'ailleurs celle dont nous avons besoin pour ce qui va suivre.

Supposons que les racines n soient maintenant les racines de l'unité ρ, racines données par l'équation

$$\rho^\mu = (-1)^\eta; \tag{113}$$

on sait que toute somme de puissances semblables des racines de l'unité est nulle quand l'exposant x n'est pas un multiple de μ ; mais, si cet exposant est multiple de μ, on a

$$\rho_1^x + \rho_2^x + \ldots + \rho_\mu^x = \mu(-1)^{\eta\frac{x}{\mu}}.$$

Nous devons donc admettre que l'on ait

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_\mu = k\mu, \tag{114}$$

k étant un nombre entier positif ou zéro ; on aura alors, pour les groupes d'exposants σ qui entrent dans le produit Π_α de (111),

$$\Sigma_\alpha(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\alpha) = x_1 + x_2 + \ldots + x_\mu = k\mu; \tag{114$'$}$$

mais il faut encore, pour que le produit Π_α ne soit pas nul, que tous les indices σ soient séparément des multiples de μ, autrement l'un des facteurs étant nul le produit serait nul.

La condition (114)$'$, étant satisfaite, il existe évidemment au moins un groupement des exposants pour lequel tous les groupes σ sont des multiples de μ ; la fonction symétrique cherchée ne peut alors être nulle. On aura donc

$$S_\sigma = \mu(-1)^{\eta\frac{\sigma}{\mu}}$$

et

$$\Pi_\alpha S_{\sigma_1} S_{\sigma_2} \ldots S_{\sigma_\alpha} = \Pi_\alpha\left[\mu^{\lambda_\alpha}(-1)^{\eta\frac{\varsigma_\alpha}{\mu}}\right],$$

en faisant

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\alpha = \varsigma_\alpha;$$

le produit précédent devient alors

$$\mu^{\lambda_1}(-1)^{\eta\frac{\varsigma_1}{\mu}}\mu^{\lambda_2}(-1)^{\eta\frac{\varsigma_2}{\mu}}\ldots\mu^{\lambda_\mu}(-1)^{\eta\frac{\varsigma_\mu}{\mu}} = \mu^\nu(-1)^{\eta k},$$

en vertu de (110)$'$ et (114)$'$.

D'après cela l'agrégat (111) n'est plus formé que de termes identiques; soit $\mathfrak{N}$ le nombre de ces termes, on a, pour l'expression cherchée, d'après (112),

$$(115)\quad \left\{ \begin{aligned} & \Sigma \rho_1^{x_1} \rho_2^{x_2} \cdots \rho_\mu^{x_\mu} \\ & = \frac{1}{1^{\varpi_1|1} 1^{\varpi_2|1} \cdots} \operatorname{Agr}[(-1)^{\mu-\nu+\eta k} . \mu^\nu (1^{0|1})^{\lambda_1} (1^{1|1})^{\lambda_2} \cdots (1^{\mu-1|1})^{\lambda_\mu} \mathfrak{N}]. \end{aligned} \right.$$

Le maximum de $\mathfrak{N}$ est donné par $(111)'$; ce nombre dépend d'ailleurs de conditions essentiellement arithmétiques telles que la somme des exposants ς puisse être partagée en groupes de λ quantités dont chacune est ou n'est pas un multiple de μ : c'est pourquoi cette quantité ne comporte pas de détermination algorithmique. Nous avons vérifié la formule (115) en calculant un certain nombre de ces fonctions symétriques par cette formule et par d'autres procédés.

Sinus des ordres supérieurs. — Nous pouvons maintenant aborder la théorie générale des sinus des ordres supérieurs, fonctions symétriques transcendantes dont on n'a encore donné que quelques propriétés particulières.

Mais, avant tout, il importe de faire un choix convenable de notations : nous noterons par la lettre italique S, accompagnée d'un indice, tout sinus dont le genre ne sera pas indiqué; par exemple, $S_\nu x$ désigne le $\nu^{\text{ième}}$ sinus de x. Le cosinus sera alors $S_0 x$ ou $S_\mu x$, dans le cas de sinus d'ordre $\mu - 1$; cependant, il peut être souvent utile de distinguer cette fonction d'une manière particulière à cause du rôle qu'elle joue par rapport aux sinus : le cosinus sera alors noté par Cx. Si le genre des sinus est désigné, nous noterons par la lettre de ronde $\mathcal{S}$ les sinus du genre elliptique et le cosinus par $\mathcal{C}$; nous noterons encore par la lettre gothique $\mathfrak{S}$ les sinus hyperboliques et le cosinus par $\mathfrak{C}$.

Ceci posé, considérons l'exponentielle

$$(116)\qquad e^{\rho x} = 1 + \frac{\rho x}{1} + \frac{\rho^2 x^2}{1.2} + \ldots + \frac{\rho^\nu x^\nu}{1^{\nu|1}} + \ldots,$$

la quantité ρ étant l'une des racines de l'unité satisfaisant à l'équation (113) (η est une quantité dont le rôle spécial est de représenter un nombre pair ou impair). Le développement (116), étant convergent pour toute valeur de x, peut être partagé en μ suites de termes, telles que chacune contienne en facteur une certaine puissance de ρ, ce qui est possible à cause de la périodicité des racines de l'unité.

Appelons, par définition, *cosinus* la suite des termes qui contiennent, en facteur commun, les puissances de ρ dont les exposants, multiples de μ, les

rendent toutes égales à $(-1)^\eta$; appelons *premier sinus* la suite des termes qui contiennent les puissances de ρ dont les exposants, multiples de $\mu+1$, les rendent toutes égales à $(-1)^{\eta\frac{\mu+1}{\mu}}$. Généralement appelons $\nu^{ième}$ *sinus* la suite des termes qui contiennent en facteur commun les puissances de ρ dont les exposants, multiples de $\mu+\nu$, les rendent toutes égales à $(-1)^{\eta\frac{\mu+\nu}{\mu}}$.

Il y a ainsi un cosinus et $\mu-1$ sinus qui ont pour expressions

$$(117)\quad \left\{\begin{aligned} Cx = S_0 x &= 1 + (-1)^\eta \frac{x^\mu}{1^{\mu|1}} + \frac{x^{2\mu}}{1^{2\mu|1}} + (-1)^\eta \frac{x^{3\mu}}{1^{3\mu|1}} + \ldots,\\ S_1 x &= \frac{x}{1} + (-1)^\eta \frac{x^{\mu+1}}{1^{\mu+1|1}} + \frac{x^{2\mu+1}}{1^{2\mu+1|1}} + (-1)^\eta \frac{x^{3\mu+1}}{1^{3\mu+1|1}} + \ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ S_\nu x &= \frac{x^\nu}{1^{\nu|1}} + (-1)^\eta \frac{x^{\mu+\nu}}{1^{\mu+\nu|1}} + \frac{x^{2\mu+\nu}}{1^{2\mu+\nu|1}} + (-1)^\eta \frac{x^{3\mu+\nu}}{1^{3\mu+\nu|1}} + \ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ S_{\mu-1} x &= \frac{x^{\mu-1}}{1^{\mu-1|1}} + (-1)^\eta \frac{x^{2\mu-1}}{1^{2\mu-1|1}} + \frac{x^{3\mu-1}}{1^{3\mu-1|1}} + (-1)^\eta \frac{x^{4\mu-1}}{1^{4\mu-1|1}} + \ldots \end{aligned}\right.$$

D'après cela, l'expression (116) peut s'écrire

$$(118)\qquad e^{\rho x} = Cx + \rho S_1 x + \rho^2 S_2 x + \ldots + \rho^{\mu-1} S_{\mu-1} x = \Sigma_\varpi \rho^\varpi S_\varpi x,$$

ϖ pouvant varier de zéro à $\mu-1$, et généralement pouvant prendre μ valeurs consécutives. Les expressions (117) et (118) sont les expressions fondamentales de la théorie des sinus.

Pour avoir l'expression d'un sinus en fonction d'exponentielles, multiplions les deux membres de (118) par $\rho^{\mu-\nu}$ et donnons à ρ successivement toutes les valeurs qui conviennent à l'équation (113), puis additionnons toutes les égalités ainsi obtenues, nous aurons, en vertu des propriétés des racines de l'unité, propriétés que nous avons rappelées plus haut,

$$(119)\qquad S_\nu x = \frac{(-1)^\eta}{\mu}\left(\rho_1^{\mu-\nu} e^{\rho_1 x} + \rho_2^{\mu-\nu} e^{\rho_2 x} + \ldots + \rho_\mu^{\mu-\nu} e^{\rho_\mu x}\right).$$

Examinons l'influence du nombre η. Si ce nombre est impair, les signes sont alternés dans les développements (117) et les fonctions sont dites du *genre elliptique;* si η est pair, les signes sont tous positifs et les fonctions sont dites du *genre hyperbolique*. Ces dénominations proviennent de ce que, pour le premier ordre, où $\mu=2$ et où il y a par conséquent un seul sinus et un cosinus, si η est impair, on a les sinus et cosinus du cercle, tandis que, si η est pair, on a les sinus et cosinus de l'hyperbole; enfin, au lieu de la

base e de l'exponentielle, on pourrait considérer toute autre base, ce qui, pour $\mu = 2$, constitue les sinus et cosinus elliptiques ou hyperboliques proprement dits. Il nous suffira de considérer les exponentielles dont la base est e.

D'après ce qui précède, les propriétés des sinus dérivent immédiatement de celles des exponentielles. Par exemple, si l'on différentie l'une des expressions (117), on obtient celle qui la précède; on a donc

$$(120) \qquad \frac{d S_\nu x}{dx} = S_{\nu-1} x.$$

Quant au cosinus, il donne

$$(120)' \qquad \frac{d C x}{dx} = (-1)^\eta \frac{d S_\mu x}{dx} = (-1)^\eta S_{\mu-1} x;$$

ainsi, pour les sinus du genre hyperbolique, les différentiations n'amènent pas de changements de signes; ces changements ne se produisent que dans les sinus du genre elliptique pour le cosinus.

On voit encore, d'après (117), les relations qui existent entre les sinus d'ordres pairs, de genres différents, pour un même ordre et un même indice; on a ainsi, μ étant alors impair,

$$(121) \qquad \mathcal{S}_\nu(-x) = (-1)^\nu \mathfrak{S}_\nu x, \quad \mathfrak{S}_\nu(-x) = (-1)^\nu \mathcal{S}_\nu x;$$

pour les ordres impairs, c'est-à-dire quand μ est pair, on a seulement

$$(121)' \qquad \mathcal{S}_\nu(-x) = (-1)^\nu \mathcal{S}_\nu x, \quad \mathfrak{S}_\nu(-x) = (-1)^\nu \mathfrak{S}_\nu x,$$

comme on le sait pour les sinus du cercle et de l'hyperbole.

La propriété fondamentale des exponentielles consiste dans la relation

$$e^a e^b = e^{a+b};$$

toutes les propriétés des sinus peuvent également s'en déduire.

Ainsi nous avons, d'après cela,

$$e^{\rho(x_1+x_2+\ldots+x_\alpha)} = e^{\rho x_1} e^{\rho x_2} \ldots e^{\rho x_\alpha},$$

et, remplaçant chaque exponentielle par sa valeur tirée de (118), il vient

$$\Sigma_\varpi \rho^\varpi S_\varpi(x_1 + x_2 + \ldots + x_\alpha) = \Sigma_\varpi \rho^\varpi S_\varpi x_1 \, \Sigma_\varpi \rho^\varpi S_\varpi x_2 \ldots \Sigma_\varpi \rho^\varpi S_\varpi x_\alpha,$$

ou en effectuant le produit du deuxième membre au moyen d'un agrégat,

comme nous l'avons déjà montré,

$$\operatorname{Agr}(\rho^{k_1+k_2+\dots+k_\alpha} S_{k_1} x_1 \, S_{k_2} x_2 \dots S_{k_\alpha} x_\alpha),$$

les indices k variant de zéro à $\mu - 1$.

Pour éliminer les racines de l'unité, nous opérerons comme plus haut; multiplions de part et d'autre par $\rho^{\mu-\nu}$, et donnons successivement à ρ les μ valeurs que cette quantité comporte comme racine de l'unité, nous aurons ainsi μ relations qui, additionnées, donnent

$$(122) \qquad S_\nu(x_1 + x_2 + \dots + x_\alpha) = \operatorname{Agr}[(-1)^{h\eta} S_{k_1} x_1 S_{k_2} x_2 \dots S_{k_\alpha} x_\alpha],$$

en divisant les deux membres par $\mu(-1)^\eta$, et la condition relative aux indices correspondant aux fonctions symétriques de ρ qui ne sont pas nulles est

$$(122)' \qquad k_1 + k_2 + \dots + k_\mu = h\mu + \nu.$$

Si toutes les quantités $x_1, x_2, \dots, x_\alpha$ sont égales, l'expression (122) peut se mettre sous une forme plus commode, car on a

$$\Sigma_\varpi \rho^\varpi S_\varpi \alpha x = (\Sigma_\varpi \rho^\varpi S_\varpi x)^\alpha.$$

La puissance qui forme le second membre est, comme nous l'avons vu plus haut (56),

$$1^{\alpha|1} \operatorname{Agr}\left[\rho^{0\lambda_0} \rho^{1\lambda_1} \dots \rho^{(\mu-1)\lambda_{\mu-1}} \frac{S_0^{\lambda_0} x \, S_1^{\lambda_1} x \dots S_{\mu-1}^{\lambda_{\mu-1}} x}{1^{\lambda_0|1} \, 1^{\lambda_1|1} \dots 1^{\lambda_{\mu-1}|1}}\right],$$

avec la condition

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{\mu-1} = \alpha.$$

Multiplions de part et d'autre par $\rho^{\mu-\nu}$ et, donnant à ρ les μ valeurs qui satisfont à (113), nous obtenons μ relations qui, additionnées, conduisent à celle-ci :

$$(123) \qquad S_\nu \alpha x = 1^{\alpha|1} \operatorname{Agr}\left[(-1)^{h\eta} \frac{S_0^{\lambda_0} x \, S_1^{\lambda_1} x \dots S_{\mu-1}^{\lambda_{\mu-1}} x}{1^{\lambda_0|1} \, 1^{\lambda_1|1} \dots 1^{\lambda_{\mu-1}|1}}\right],$$

avec les conditions

$$(123)' \qquad \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{\mu-1} = \alpha, \\ 1\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + (\mu-1)\lambda_{\mu-1} = h\mu + \nu. \end{cases}$$

D'après la définition des sinus (117), ou d'après (118), il existe une relation entre les μ fonctions d'un même genre qui se déduit de la propriété fonda-

mentale des exponentielles. En effet, on a

$$e^{x(\rho_1+\rho_2+\dots+\rho_\mu)} = e^{\rho_1 x} e^{\rho_2 x} \dots e^{\rho_\mu x};$$

or $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\mu$ étant les μ racines de l'unité, leur somme est nulle et le premier membre de cette égalité est l'unité; remplaçant les exponentielles du deuxième membre par leur expression d'après (118) et effectuant le produit comme plus haut, nous obtenons

$$(124) \qquad 1 = \mathrm{Agr}\left(S_{k_0}x S_{k_1}x \dots S_{k_{\mu-1}}x\, \Sigma \rho_1^{k_0} \rho_2^{k_1} \dots \rho_\mu^{k_{\mu-1}}\right).$$

L'agrégat contient la fonction symétrique que nous avons étudiée précédemment; son expression est (115); pour que les termes qu'elle contient ne soient pas nuls, il faut que l'on ait

$$(124)' \qquad k_0 + k_1 + \dots + k_{\mu-1} = h\mu,$$

les quantités $k_0, k_1, \dots, k_{\mu-1}$ et h étant des nombres positifs variant de zéro à $\mu - 1$.

L'expression (124) donne ainsi, pour les trois premiers ordres,

$$1 = S_0^2 x - (-1)^\eta S_1^2 x,$$
$$1 = S_0^3 x + (-1)^\eta S_1^3 x + (-1)^{2\eta} S_2^3 x - (-1)^\eta 3 S_0 x S_1 x S_2 x,$$
$$1 = S_0^4 x - (-1)^\eta S_1^4 x + (-1)^{2\eta} S_2^4 x - (-1)^{3\eta} S_3^4 x - (-1)^\eta 4 S_1 x S_3 x - (-1)^\eta 2 S_2^2 x$$
$$+ (-1)^\eta 4 S_1^2 x S_2 x + (-1)^{2\eta} 4 S_2 x S_3^2 x + (-1)^{2\eta} 2 S_1^2 x S_3^2 x - (-1)^{2\eta} 4 S_1 x S_2^2 x S_3 x.$$

Ces résultats ont été insérés dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. XCII, nº 22 du 30 mai 1881. Une autre forme de la relation dont il s'agit a été communiquée en même temps par M. Rouillaud.

Pour faire l'application des formules qui précèdent, supposons, dans (122), $\mu = 3$, $\nu = 2$, $\alpha = 2$, nous aurons ainsi pour le second sinus du second ordre, en mettant x et y au lieu de x_1 et x_2,

$$S_2(x+y) = \mathrm{Agr}[(-1)^{h\eta} S_{k_1} x S_{k_2} y],$$
$$k_1 + k_2 = 3h + 2.$$

Or $h = 0$ satisfait seul aux conditions voulues, car le maximum de $k_1 + k_2$ est 4; on a donc les systèmes de valeurs

$$k_1 = 0, \quad k_1 = 1, \quad k_1 = 1,$$
$$k_2 = 2, \quad k_2 = 1, \quad k_2 = 0;$$

par suite

$$S_2(x+y) = C x S_2 y + S_1 x S_1 y + S_2 x C y.$$

En différentiant par rapport à l'une des variables, x par exemple, il vient

$$S_1(x+y) = (-1)^\eta S_2 x S_2 y + C x S_1 y + S_1 x C y,$$
$$C(x+y) = (-1)^\eta S_1 x S_2 y + (-1)^\eta S_2 x S_1 y + C x C y.$$

Supposons encore, dans (123), $\mu = 2$, $\eta = 1$, $\nu = 1$, $\alpha = 3$, nous aurons pour le sinus de $3x$ du premier ordre et du genre elliptique, c'est-à-dire pour le sinus circulaire,

$$\sin 3x = 1^{3|1} \operatorname{Agr}\left[(-1)^h \frac{(\cos x)^{\lambda_0}(\sin x)^{\lambda_1}}{1^{\lambda_0|1}\, 1^{\lambda_1|1}}\right],$$

avec

$$\lambda_0 + \lambda_1 = 3,$$
$$\lambda_1 = 2h + 1.$$

Soit $h = 0$, on a

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_0 = 2, \quad \frac{1.2.3}{1.2.1} \cos^2 x \sin x;$$

soit $h = 1$, on a

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_0 = 0, \quad -\frac{1.2.3}{1.2.3} \sin^3 x,$$

par suite

$$\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x.$$

Les relations (122), (123) et (124) sont les plus importantes de la théorie des sinus, il en existe beaucoup d'autres que l'on obtiendrait par la combinaison des diverses fonctions symétriques que l'on pourrait former au moyen des exponentielles de la forme $e^{\rho x}$; mais il est préférable d'obtenir toutes les relations par le procédé général indiqué par Wronski. Ce procédé consiste, en principe, à développer toute fonction de sinus $F(S_0 x, S_1 x, \ldots, S_{\mu-1} x)$ en fonction des exponentielles $e^{\rho_1 x}, e^{\rho_2 x}, \ldots, e^{\rho_\mu x}$ considérées comme variables indépendantes, au moyen de la formule de Maclaurin étendues à plusieurs variables; dans ces développements les racines de l'unité se groupent en fonctions symétriques et s'expriment comme nous l'avons vu. Nous avons appliqué cette méthode très élégante à diverses fonctions de sinus et nous avons trouvé des développements nouveaux, après avoir vérifié les formules que nous avions établies sur des développements connus. Malheureusement nous ne pouvons donner d'exemples de ce genre; il serait nécessaire de reproduire les expressions des dérivées secondaires de plusieurs variables et nous serions entraînés hors des limites que nous nous sommes fixées.

Intégrales exprimées en fonction des sinus des ordres supérieurs. — Avant de terminer, il nous reste à montrer de quelle manière les sinus des ordres supérieurs entrent dans les intégrations; en cela, nous ne ferons que suivre la marche déjà indiquée par M. Yvon Villarceau.

Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$(125)\qquad C_\mu \frac{d^\mu y}{dx^\mu} + C_{\mu-1}\frac{d^{\mu-1}y}{dx^{\mu-1}} + \ldots + C_1\frac{dy}{dx} + C_0 = f(x),$$

dont l'équation caractéristique est

$$(126)\qquad C_\mu m^\mu + C_{\mu-1}m^{\mu-1} + \ldots + C_1 m + C_0 = 0;$$

la solution en exponentielles est, comme nous l'avons vu,

$$(127)\qquad \left\{\begin{aligned} y = \frac{(-1)^{\mu-1}}{C_\mu N}\Big[& N_1 e^{m_1 x}\int f(x)e^{-m_1 x}\,dx - N_2 e^{m_2 x}\int f(x)e^{-m_2 x}\,dx + \ldots \\ & + (-1)^{\mu-1}N_\mu e^{m_\mu x}\int f(x)e^{-m_\mu x}\,dx\Big]. \end{aligned}\right.$$

Les valeurs des déterminants $N, N_1, \ldots, N_\mu$ sont données plus bas (129).

Nous supposerons les racines imaginaires dans l'équation (126) au nombre de μ ou de $\mu - 1$, suivant que le degré sera pair ou impair; il suffit de considérer ce cas, parce que, si le nombre des racines imaginaires était moindre, on partagerait les racines de l'équation en deux groupes, l'un qui contiendrait les racines réelles et l'autre toutes les racines imaginaires dont on réduirait les imaginaires comme il suit. Rappelons qu'ordinairement on groupe deux à deux les racines imaginaires conjuguées et l'on transforme séparément chacun de ces groupes au moyen des sinus circulaires; on suppose ainsi aux racines la forme $a + b\sqrt{-1}$, mais, si nous groupons μ ou $\mu - 1$ racines imaginaires, nous aurons affaire à des sinus de l'ordre $\mu - 1$ ou $\mu - 2$ et, d'après ce que nous venons de voir, la forme $a + b\sqrt{-1}$ pour les racines de (126) ne peut convenir; il est nécessaire pour l'homogénéité d'adopter la forme plus générale

$$(128)\qquad m = a_0 + \rho a_1 + \rho^2 a_2 + \ldots + \rho^{\mu-1}a_{\mu-1},$$

ρ étant une racine $\mu^{\text{ième}}$ de l'unité, ou une racine de l'équation (113); dans le cas présent toutes les quantités a sont réelles. Il ne reste plus maintenant qu'à substituer cette valeur de (128) dans l'expression (127). Nous savons que les déterminants qui entrent dans cette expression sont

$$(129)\qquad \left\{\begin{aligned} N &= \mathfrak{D}[m_1^0\, m_2^1 \ldots m_\mu^{\mu-1}], \\ N_\sigma &= \mathfrak{D}[m_1^0\, m_2^1 \ldots m_{\sigma-1}^{\sigma-2}\, m_{\sigma+1}^{\sigma-1} \ldots m_\mu^{\mu-2}]. \end{aligned}\right.$$

Formons la puissance ϖ de la racine m donnée par (128), cette puissance sera une somme telle que

$$(129)' \qquad m^{\varpi} = B_0(\varpi) + \rho B_1(\varpi) + \rho^2 B_2(\varpi) + \ldots + \rho^{\mu-1} B_{\mu-1}(\varpi),$$

puis donnons à ϖ les valeurs successives 0, 1, 2, ..., $\mu - 1$ et à ρ les μ valeurs qui satisfont à (113), pour obtenir les μ valeurs des μ puissances des m, et substituons ces valeurs de m dans les déterminants (129).

Chaque élément étant formé d'une somme de μ termes, le premier déterminant N se transforme en une somme de déterminants de la forme

$$\mathfrak{D}[\rho_1^0 . \rho_2^\alpha B_\alpha(1) . \rho_3^\beta B_\beta(2) \ldots \rho_\mu^\omega B_\omega(\mu - 1)]$$

ou bien, en mettant les coefficients de ρ en facteur,

$$B_\alpha(1) B_\beta(2) \ldots B_\omega(\mu - 1)\, \mathfrak{D}[\rho_1^0 \rho_2^\alpha \rho_3^\beta \ldots \rho_\mu^\omega].$$

Les exposants ou indices α, β, ..., ω prennent les valeurs de 1 à $\mu - 1$; or, si deux exposants sont égaux, le déterminant est nul; nous n'avons donc à considérer, dans les divers déterminants, pour les exposants de ρ, que les valeurs qui reproduisent toutes les permutations des nombres 1, 2, ..., $\mu - 1$. Il en résulte que tous ces déterminants sont égaux au signe près, et, en mettant les exposants dans l'ordre des nombres naturels dans l'expression de chaque déterminant, le signe varie à chaque permutation; si donc on met en facteur commun ces déterminants en ρ dans la somme qui compose N, la somme des produits des coefficients B, eu égard aux signes qui leur correspondent, sera un déterminant, et l'on aura

$$(130) \qquad N = \mathfrak{D}[B_1(1) B_2(2) \ldots B_{\mu-1}(\mu - 1)]\, \mathfrak{D}[\rho_1^0 \rho_2^1 \rho_3^2 \ldots \rho_\mu^{\mu-1}].$$

Le second déterminant N_σ est le déterminant mineur de N qui ne contient ni m_σ ni les puissances $\mu - 1$ des autres éléments, il est formé d'une somme de termes de la forme

$$\mathfrak{D}[\rho_1^0 . \rho_2^\alpha B_\alpha(1) . \rho_3^\beta B_\beta(2) \ldots \rho_{\sigma-1}^\delta B_\delta(\sigma - 2) \rho_{\sigma+1}^\varepsilon B_\varepsilon(\sigma - 1) \ldots \rho_\mu^\omega B_\omega(\mu - 2)];$$

les indices ou exposants α, β, ..., ω prennent les valeurs de 1 à $\mu - 1$; si l'on met les coefficients B en facteur, ce déterminant devient

$$B_\alpha(1) B_\beta(2) \ldots B_\delta(\sigma - 2) B_\varepsilon(\sigma - 1) \ldots B_\omega(\mu - 2)\, \mathfrak{D}[\rho_1^0 \rho_2^\alpha \rho_3^\beta \ldots \rho_{\sigma-1}^\delta \rho_{\sigma+1}^\varepsilon \ldots \rho_\mu^\omega].$$

Or, si deux exposants de ρ sont égaux, le déterminant est nul; il n'y a donc à considérer pour ces exposants que les arrangements des $\mu - 1$ premiers nombres pris $\mu - 2$ à $\mu - 2$. Désignons par ν_1, ν_2, ..., $\nu_{\mu-2}$ un groupe de

$\mu - 2$ de ces nombres et formons toutes les permutations; nous aurons, comme plus haut, un produit de deux déterminants, et la quantité N_σ sera la somme de $\mu - 1$ produits semblables, en prenant $\mu - 1$ groupes de $\mu - 2$ exposants, c'est-à-dire que l'on aura

(131) $$N_\sigma = \Sigma_{\mu-1} \mathfrak{D}\left[B_{\nu_1}(1)\, B_{\nu_2}(2) \ldots B_{\nu_{\mu-2}}(\mu - 2)\right] \mathfrak{D}\left[\rho_1^0\, \rho_2^{\nu_1}\, \rho_3^{\nu_2} \ldots \rho_{\sigma-1}^{\nu_{\sigma-2}}\, \rho_{\sigma+1}^{\nu_{\sigma-1}} \ldots \rho_\mu^{\nu_{\mu-2}}\right].$$

Il faut encore donner l'expression des exponentielles; pour cela on a, d'après (128),

$$e^{mx} = e^{a_0 x}\, e^{\rho a_1 x}\, e^{\rho^2 a_2 x} \ldots e^{\rho^{\mu-1} a_{\mu-1} x};$$

remplaçant chacun des facteurs par leur expression en fonction des sinus (118) et effectuant le produit, on trouve une expression de la forme

(132) $$e^{mx} = e^{a_0 x}(k_0 + \rho k_1 + \rho^2 k_2 + \ldots + \rho^{\mu-1} k_{\mu-1})$$

et de même

(132)' $$e^{-mx} = e^{-a_0 x}(k'_0 + \rho k'_1 + \rho^2 k'_2 + \ldots + \rho^{\mu-1} k'_{\mu-1}).$$

Il reste maintenant à substituer les quantités (130), (131), (132) et (132)' dans (127), on a ainsi μ termes de la forme

(133) $$\left\{\begin{aligned} &\Sigma_{\mu-1} \mathfrak{D}\left[B_{\nu_1}(1) \ldots B_{\nu_{\mu-2}}(\mu - 2)\right] \mathfrak{D}\left[\rho_1^0\, \rho_2^{\nu_1} \ldots \rho_{\sigma-1}^{\nu_{\sigma-2}}\, \rho_{\sigma+1}^{\nu_{\sigma-1}} \ldots \rho_\mu^{\nu_{\mu-2}}\right] e^{a_0 x} \\ &\quad \times (k_0 + \rho_\sigma k_1 + \ldots + \rho_\sigma^{\mu-1} k_{\mu-1}) \int f(x) e^{-a_0 x}(k'_0 + \rho_\sigma k'_1 + \ldots + \rho_\sigma^{\mu-1} k'_{\mu-1})\, dx. \end{aligned}\right.$$

ρ étant indépendant de x peut sortir du signe $\int$ dans les opérations partielles à effectuer; considérons donc le déterminant en ρ comme un déterminant mineur de celui de N, (130), et multiplions-le par $\rho_\sigma^\tau \rho_\sigma^{\tau'}$, chacune de ces quantités étant respectivement en facteur de k_τ et de k'_τ, le produit

(133)' $$\mathfrak{D}\left[\rho_1^0\, \rho_2^{\nu_1} \ldots \rho_{\sigma-1}^{\nu_{\sigma-2}}\, \rho_{\sigma+1}^{\nu_{\sigma-1}} \ldots \rho_\mu^{\nu_{\mu-2}}\right] . \rho_\sigma^{\tau+\tau'} . \rho_\sigma$$

sera un des termes principaux du déterminant en ρ de (130) si l'on a

(134) $$\tau + \tau' = t\mu + \nu,$$

car il vient

$$\rho_\sigma^\tau\, \rho_\sigma^{\tau'} = \rho_\sigma^{\nu_{\mu-1}}(-1)^{t_{\tau_1}}.$$

Faisons maintenant la somme des termes qui entrent dans les μ sommes pareilles à (133) et qui ont mêmes indices $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu-2}$ que ceux que nous venons de considérer, les coefficients des termes tels que (133)' seront les mêmes, et les quantités telles que (133)' ne différeront que par l'indice σ,

leur somme, à cause de leurs signes respectifs, reproduira le déterminant en ρ de (130).

Le déterminant en question se trouvant ainsi en facteur au numérateur dans l'expression (127) et également en facteur dans N, au dénominateur, disparaîtra sans qu'il soit nécessaire d'évaluer cette fonction symétrique des racines de l'unité.

Nous venons de supposer que la condition (134) était réalisée; s'il n'en était pas ainsi, en composant avec les quantités (133)′ des sommes de μ termes, comme plus haut, on formerait des déterminants d'ordre μ, comme celui de (130), mais dans lesquels deux exposants de ρ seraient égaux; les déterminants seraient donc nuls. Il n'existe donc que les sommes dont nous venons de parler et dont les signes respectifs sont $(-1)^{\nu_{\mu-1}}$, car le signe de la quantité (133) est $(-1)^{\sigma-1}(-1)^{\nu_{\mu-1}}(-1)^{t_\eta}$; le premier facteur est le signe même du terme considéré dans le déterminant et le troisième appartient aux facteurs k_τ et k'_τ. Nous avons donc définitivement, au lieu de (127),

$$(135)\quad \left\{\begin{aligned} y = {} & \frac{(-1)^{\mu-1} e^{a_0 x}}{C_\mu \circledS[B_1(1)\,B_2(2)\ldots B_{\mu-1}(\mu-1)]} \sum_\nu \Big\{ (-1)^{\nu_{\mu-1}} \circledS[B_{\nu_1}(1)\,B_{\nu_2}(2)\ldots B_{\nu_{\mu-2}}(\mu-2)] \\ & \times \sum_\tau \Big[(-1)^{t_\eta} k_\tau \int f(x)\, e^{-a_0 x} k'_\tau\, dx \Big] \Big\}, \end{aligned}\right.$$

avec la condition (134), les indices ν étant pris par groupes de $\mu-2$, parmi les $\mu-1$ premiers nombres, ce qui donne $\mu-1$ termes pour la somme Σ_ν.

Pour achever ce calcul, il reste encore à donner la composition des quantités $B_\nu(\varpi)$ et k_τ. Pour ce qui concerne la première, d'après ce que nous avons vu, par (56), la puissance ϖ du polynôme (128) est

$$1^{\varpi|1} \operatorname{Agr}\left(\frac{a_0^{q_0}.\rho^{q_1} a_1^{q_1}.\rho^{q_2} a_2^{q_2} \ldots \rho^{\mu-1} a_{\mu-1}^{q_{\mu-1}}}{1^{q_0|1}\, 1^{q_1|1}\, 1^{q_2|1} \ldots 1^{q_{\mu-1}|1}}\right),$$

avec la condition

$$(136)\qquad q_0 + q_1 + q_2 + \ldots + q_{\mu-1} = \varpi;$$

or, si l'on fait

$$(136)'\qquad 1q_1 + 2q_2 + \ldots + (\mu-1)q_{\mu-1} = p\mu + \nu,$$

le produit des puissances de ρ entre parenthèses dans l'agrégat est

$$\rho^{p\mu+\nu} = (-1)^{p\eta}\rho^\nu;$$

il en résulte, en tenant compte de (129)′, que, pour une valeur donnée de ν,

on aura

$$(137) \qquad B_\nu(\varpi) = 1^{\varpi|1} \operatorname{Agr}\left[\frac{(-1)^{p\eta} a_0^{q_0} a_1^{q_1} a_2^{q_2} \ldots a_{\mu-1}^{q_{\mu-1}}}{1^{q_0|1} 1^{q_1|1} \ldots 1^{q_{\mu-1}|1}}\right],$$

avec les conditions (136) et (136)', pour toutes les valeurs entières et positives de $q_0, q_1, \ldots, q_{\mu-1}$, p et ν; on suppose $\nu < \mu$. En dehors de la condition (136)', tous les termes sont nuls.

Pour la valeur k_τ, on aura de la même façon

$$(138) \qquad k_\tau = \operatorname{Agr}\left[(-1)^l S_{h_1} a_0 x\, S_{h_2} a_1 x \ldots S_{h_{\mu-1}} a_{\mu-1} x\right],$$

avec la condition

$$(138)' \qquad 1h_1 + 2h_2 + \ldots + (\mu - 1)h_{\mu-1} = l\eta + \tau.$$

Pour la quantité k'_τ, il suffit de changer x en $-x$ dans cette expression. L'expression (135) est ainsi complètement déterminée.

Nous avons déjà dit que, si $f(x)$ est nul, l'expression (135) se réduit à

$$y = e^{a_0 x} \Sigma_\tau (k_\tau M_\tau),$$

M étant une quantité arbitraire ; on a donc

$$(139) \qquad y = e^{a_0 x}(k_0 M_0 + k_1 M_1 + \ldots + k_{\mu-1} M_{\mu-1}).$$

La solution (139) doit être ajoutée à (135) pour avoir l'intégrale complète de l'équation (125).

Nous avons déjà fait l'application de la solution (135) à l'équation différentielle du troisième ordre, nous n'y reviendrons pas.

Les sinus des ordres supérieurs ont été signalés et étudiés pour la première fois par Wronski dans l'*Introduction à la philosophie des Mathématiques* en 1811, puis ce géomètre en a repris les propriétés fondamentales dans le tome I de la *Réforme* en 1847-48. Postérieurement à 1811 plusieurs géomètres les ont aussi rencontrés et en ont fait connaître certaines propriétés ; nous citerons entre autres M. Louis Olivier et le professeur Magnus, *Journal de Crelle*, 1827, et M. Yvon Villarceau, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1870-80. Ces fonctions, désignées aussi sous le nom de *cofonctions*, ou des fonctions analogues, ont encore été l'objet d'études récentes ; mais aucun auteur, ce nous semble, n'a donné les principales propriétés des sinus sous la forme générale que nous venons de présenter. Dans les calculs précédents, nous nous sommes placé au point de vue indiqué par Wronski en nous bornant aux seules considérations qui nous paraissent devoir présenter quelque utilité dans la pratique ; pour ces raisons, nous n'avons pas voulu

nous laisser guider par certaines analogies offertes par les lignes trigonométriques ou autres fonctions. C'est ainsi que nous écartons la considération des tangentes des ordres supérieurs; les Tables du deuxième et du troisième ordre présenteront déjà, pour les sinus et cosinus, une étendue suffisante sans qu'il soit nécessaire de compliquer leur disposition par des fonctions qui n'offrent pas d'utilité réelle.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages

Préface V

Résolution et intégration des équations V

INTRODUCTION 5

Énumération des diverses méthodes. — Fonctions employées et notations.

MÉTHODE SECONDAIRE ÉLÉMENTAIRE 14

Conditions générales de la méthode. — Expression fondamentale. — Remarques sur les quantités idéales et absurdes. — Principe de convergence; procédés secondaires, génération neutre. — Nature de la valeur fondamentale.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS PRIMITIVES 23

Équation réduite. — Solutions théoriques. — Méthode d'exhaustion. — Exemple.

DIGRESSION SUR LES SÉRIES 33

Exemples.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES 51

Considérations générales.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NE CONTENANT QU'UNE SEULE VARIABLE INDÉPENDANTE 61

Formation de l'équation réduite. — Calcul de l'inconnue. — Exemple. — Transformations relatives à la convergence. — Exemple. — Introduction d'une fonction arbitraire. — Résumé de la méthode d'intégration. — Exemple : calculs numériques.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES NE CONTENANT QU'UNE VARIABLE INDÉPENDANTE 105

Équations aux différences finies. — Calcul de l'inconnue. — Transformations relatives aux quantités imaginaires. — Exemple.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES OU AUX DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES .. 129

Manière d'exprimer ces équations. — Cas des différences. — Intégrale générale. — Cas des différentielles : valeur fondamentale. — Intégrale générale. — Détermination des fonctions arbitraires. — Exemple : Du mouvement vibratoire des fluides élastiques.

Pages.

RÉSOLUTION ET INTÉGRATION DES ÉQUATIONS SIMULTANÉES 179

Calcul des dérivées. — Détermination des valeurs fondamentales et des quantités arbitraires. — Transformations relatives à la convergence. — Sur la formation des équations différentielles. — Exemple : Calcul des fonctions arbitraires de l'exemple précédent. Exemple : Calcul du profil d'égale résistance d'un mur de barrage.

RÉSUMÉ DE LA MÉTHODE 231

Complément

I. LOI SUPRÊME 235

Signification de la loi suprême. — Fondation de la loi suprême : expression de cette loi. — Détermination de la loi suprême.

II. APPLICATION DE LA LOI SUPRÊME AU DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS 251

Développement d'une fonction suivant les puissances d'une autre fonction. — Développement d'une fonction suivant les facultés d'une autre fonction. — Théorèmes. — Démonstration de la formule du problème universel.— De la méthode suprême.

III. AGRÉGATS 267

Définition. — Résolution des équations linéaires. — Système de résolution par agrégats. — Relations des indices et transformations. — Exemple de résolutions par agrégats.

IV. INTÉGRATIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS. — FONCTIONS SYMÉTRIQUES ET SINUS DES ORDRES SUPÉRIEURS....... 276

Expressions générales des différences et des différentielles. — Différences : Intégration des équations linéaires à coefficients constants; solution fondamentale. — Autres formes des intégrales; propriétés des fonctions aleph. — Cas des équations différentielles. — Fonctions symétriques et fonctions aleph. — Sinus des ordres supérieurs. — Intégrales exprimées en fonction des sinus des ordres supérieurs.

9704 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

ERRATA.

Page 10, ligne 10 en remontant, *au lieu de* $A_\mu = 0$, *lisez* $A_\mu = 1$.
Page 12, ligne 2, *au lieu de* $\aleph'(\mu)$, *lisez* $\aleph'(m)$.
Page 13, ligne 12, *au lieu de* $(a_1 + \ldots)$, *lisez* $(a_1 + \ldots)^m$.
Page 13, ligne 4 en remontant, *au lieu de* $(-1)^{n-1}$, *lisez* $(-1)^n$.
Page 15, ligne 8 au dénominateur, *au lieu de* $[d\varphi\varpi]^2$, *lisez* $[d\varphi\varpi]^3$.
Page 15, ligne 10 au numérateur, *au lieu de* $d^3[\varphi(\varpi)]^1$, *lisez* $d^3[\varphi(\varpi)]^2$.
Page 15, ligne 10 au numérateur, *au lieu de* $d\varphi(\varpi)$, *lisez* $d\varpi$.
Page 15, ligne 7 en remontant, *au lieu de* $F(x)$, *lisez* $F(y)$.
Page 15, ligne 5 en remontant, *ajoutez le facteur* $[\varphi(\varpi)]^\mu$ à la fin de la fraction.
Page 17, ligne 13, *au lieu de* ϖ, *lisez* $\varphi(\varpi)$.
Page 20, ligne 12, *remplacez le terme* $d^{\mu-1}F(u)$ par des points.
Page 22, lignes 9, 10 et 11, *au lieu de* y, *lisez* $F(y)$.
Page 28, ligne 2 en remontant, *au lieu de* $\tang a$, *lisez* $\tang \alpha$.
Page 30, ligne 5 en remontant, *au lieu de* $(1 - \tang\alpha \ldots)$, *lisez* $(1 + \tang\alpha \ldots)$.
Page 30, ligne 1 en remontant, au numérateur, *au lieu de* $\tang\alpha + n$, *lisez* $np - \tang\alpha$.
Page 31, ligne 2, *ajoutez le facteur* n^2q^2.
Page 31, ligne 3, *au lieu de* $(1 - \Phi nq) + \ldots$, *lisez* $(1 - \Phi nq)(1 - X) + \ldots$.
Page 31, ligne 6, *au lieu de* $\frac{n}{m}$, *lisez* $\frac{m}{n}$.
Page 50, ligne 2, *au lieu de* $[1 - (x - a)\ldots]$, *lisez* $[1 + (x - a)\ldots]$.
Page 50, ligne 5, entre la première accolade et le premier crochet, *au lieu de* $-2\ldots$, *lisez* $-\frac{1}{2.1^{\mu-1|1}}$.
Page 58, ligne 12 en remontant, *supprimez* généralement .... *jusqu'à* ... les autres fonctions singulières sont arbitraires, page 59.
Page 69, note en bas de la page, *voyez* la note, page 233.
Page 75, ligne 6, au numérateur, *supprimez* e^{Rx}.
Page 75, ligne 10, au numérateur, *supprimez* e^{Ra}.
Page 76, formule (1), *remplacez* y par ϖ.
Page 89, ligne 3 en remontant, *ajoutez* y en facteur au second terme.
Page 91, ligne 7 en remontant, au numérateur, *au lieu de*

$$\varpi'_{q-1}(nx + \varpi_{q-1} - b + c)^{1-\omega q} + pc^{1-\omega q}(nx + \varpi_{q-1} - b + c)\varpi'_{q-1},$$

lisez

$$\varpi'_{q-1}c^{\omega q-1}(nx + \varpi_{q-1} - b + c)^{1-\omega q} + p(nx + \varpi_{q-1} - b + c)\varpi'_{q-1}.$$

Page 94, ligne 2, *au lieu de* 38,50118, *lisez* 38,50102.
Page 94, ligne 5, *au lieu de* 38,50118, *lisez* 38,50102.
Page 107, ligne 18, *au lieu de* (22), *lisez* (2).
Page 110, ligne 2 en remontant, *au lieu de* $\left(\frac{1+r}{1+m_\sigma}\right)^u$, *lisez* $\left(\frac{1+r}{1+m_\sigma}\right)^{\frac{x}{u}}$.

Page 112, ligne 7 en remontant, *au lieu de l'exposant* $\frac{\mu(\mu-1)}{3}$, *lisez* $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$.

Page 113, ligne 6, *au lieu de* $+$ après le premier terme entre crochets, *lisez* $-$.

Page 117, ligne 1, *au lieu de* quand les μ racines sont imaginaires, *lisez* quand les μ racines, ou $\mu-1$, sont imaginaires.

Page 117, ligne 11, *au lieu de* Σ_μ, *lisez* Σ_σ.

Page 117, ligne 8 en remontant, *au lieu de* $t\mu-\sigma$, *lisez* $t\mu+\sigma$.

Page 121, ligne 5, *au lieu de* Σ_μ, *lisez* Σ.

Page 124, ligne 8, *au lieu de* $\left(\frac{d^2\,H'_\sigma}{dx}\right)$, *lisez* $\left(\frac{d\,H'_\sigma}{dx}\right)$.

Page 138, formule (81), *au lieu de* $d^\omega Z$ au numérateur dans chaque somme, *lisez* $d^\varpi Z$.

Page 147, ligne 7, *au lieu de* au lieu de racines m de l'équation caractéristique, les racines $m-1$ ou n de l'équation (77), *lisez* au lieu des racines n de l'équation caractéristique, les racines $n-1$ ou m de l'équation (77).

Page 150, ligne 6 en remontant, *au lieu de* la valeur 1, *lisez* la valeur 0.

Page 177, ligne 7, *ajoutez* le facteur dr au premier membre de l'égalité.

Page 189, formule (106), au second membre, *au lieu de* $F(y_\alpha)$, *lisez partout* $F(\varpi_\alpha)$.

Page 212, formule (17), après le crochet, *au lieu de* se^{rx}, *lisez* $+(\omega-1)\,se^{rx}$.

Page 217, formule (32), *au lieu de* $\int_0^x z'^2$, *lisez* $\int_0^x z'^2\,dx$.

Page 242, ligne 10 en remontant, *au lieu de* Multiplions les deux nombres, *lisez* Multiplions les deux membres.

Page 259, formule (40), dans toutes les fonctions la quantité x prend ici la valeur particulière $\dot{x}$.

Page 282, ligne 14, *au lieu de* tous les termes du second membre, *lisez* tous les termes du second membre sauf le premier.

Page 283, ligne 19, *au lieu de* fonction φ, *lisez* fonction $\aleph$.

Page 302, ligne 2 en remontant, dernière égalité, *au lieu de* $k_1=1$, *lisez* $k_1=2$.

Page 306, formule (133), *supprimez* le dernier facteur $\rho\sigma$.

hommage respectueux
de l'auteur.

FORMULES

POUR LE DÉVELOPPEMENT

DES FONCTIONS IMPLICITES,

Par J. TETMAYER.

PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES ET DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
RUE DU JARDINET, 12.

1853.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

AVANT-PROPOS.

Je m'empresse d'offrir à MM. les géomètres deux nouvelles formules à l'aide desquelles on développe, avec une extrême facilité, toute fonction donnée par une équation non résolue. Ces formules renferment donc une solution générale d'un problème d'analyse dont un cas particulier seulement a été résolu par Lagrange.

La formation de l'équation $X + U = 0$, qui définit la nature des racines et détermine la loi du développement, ne saurait être assujettie à une règle applicable généralement, puisque, dans une même hypothèse, cette équation peut le plus souvent recevoir plusieurs formes différentes. Les relations des paramètres donnés indiqueront la manière dont elle doit être établie pour qu'elle fournisse une série suffisamment convergente et en même temps la plus simple possible.

J'obtiens les formules par des considérations directes. Il en résulte une démonstration indépendante de tout artifice de calcul, et j'espère qu'elle satisfera pleinement l'esprit.

Paris, le 26 mars 1853.

FORMULES

POUR LE DÉVELOPPEMENT

DES FONCTIONS IMPLICITES.

Soit

$$(1) \qquad \varphi(x) = 0$$

l'équation donnée pour la détermination de x.

On pourra toujours la mettre sous la forme

$$(2) \qquad X + U = 0,$$

où je représente par X une fonction de x telle, que les racines de l'équation

$$X = 0$$

soient les limites vers lesquelles convergent autant de racines de l'équation (1), lorsque U tend à s'annuler.

Donc, si a est une racine de l'équation $X = 0$, la racine correspondante de l'équation (2) sera

$$x = a + \zeta,$$

ζ s'annulant avec U.

Pour établir une formule applicable au développement de la racine $a + \zeta$ dans tous les cas qui peuvent se présenter, je suppose d'abord la fonction x formée de telle manière que l'équation $X = 0$ n'ait pas de racines nulles ni infinies. Dans cette hypothèse, U sera généralement fonction de x.

Considérant ensuite l'équation (2) comme cas particulier de celle-ci

$$(3) \qquad X + zU = 0,$$

j'observe que zU s'annulant aussi bien pour $z = 0$ que pour $U = 0$, il faut qu'il en soit de même de ζ, ce qui exige que la série, quelle que soit sa forme d'ailleurs, procède suivant les puissances ascendantes de z qui a ici l'unité pour valeur.

Cela posé, je conclus

$$x = a + x'_0 + \frac{x''_0}{1.2} + \ldots \frac{x_0^{(n)}}{1.2\ldots n} + \int_0^1 \frac{(1-z)^n}{1.2\ldots n} x^{(n+1)}\,dz \quad [*],$$

et il ne reste plus qu'à trouver la loi des valeurs x'_0, x''_0,..., que prennent les dérivées de x pour $z = 0$.

Pour cela, remarquons que, dans la supposition $z = 0$, X et U deviennent fonctions de a, ce que je désignerai par X_a et U_a, et prenons, par rapport à z, la dérivée de l'équation (3). Il vient

$$(4) \qquad X'x' + zU'x' + U = 0;$$

d'où

$$x' = -\frac{U}{X'} - \frac{zU'}{X'}x',$$

et

$$x'_0 = -\frac{U_a}{X'_a}.$$

On peut écrire les dérivées ultérieures de x comme il suit :

$$x'' = -\frac{2U'X' - UX''}{X'^2}x' - zD_z\left[\frac{U'}{X'}x'\right],$$

$$x''' = -D_z\left[\frac{3U'X' - UX''}{X'^2}x'\right] - zD_z^2\left[\frac{U'}{X'}x'\right],$$

$$x^{\text{IV}} = -D_z^2\left[\frac{4U'X' - UX''}{X'^2}x'\right] - zD_z^3\left[\frac{U'}{X'}x'\right],$$

. . . .

$$x^{(n)} = -D_z^{n-2}\left[\frac{nU'X' - UX''}{X'^2}x'\right] - zD_z^{n-1}\left[\frac{U'}{X'}x'\right];$$

---

[*] On parvient au même résultat en mettant l'équation (2) sous la forme

$$X + [z + (1-z)]U = 0,$$

et faisant $z = 0$ dans le développement de x ordonné suivant les puissances ascendantes de $1 - z$.

dont la dernière, à cause de

$$\frac{n\,U'X' - UX''}{X'^2} = \frac{\left(\frac{U^n}{X'}\right)'}{U^{n-1}},$$

peut aussi recevoir la forme

$$x^{(n)} = D_z^{n-2}\left[\frac{\left(\frac{U^n}{X'}\right)'}{U^{n-1}}x'\right] - z\theta,$$

θ désignant ce qui s'annule avec z.

Nous aurons, par conséquent, pour $n = 2$,

$$x'' = -\frac{\left(\frac{U^2}{X'}\right)'}{U}x' - z\theta,$$

$$x''_0 = -\frac{\left(\frac{U_a^2}{X'_a}\right)'}{U_a}x'_0,$$

et substituant à x'_0 sa valeur,

$$x''_0 = \frac{\left(\frac{U_a^2}{X'_a}\right)'}{X'_a}.$$

Pour $n = 3$, il vient

$$x''' = -\left(\frac{\left(\frac{U^3}{X'}\right)'}{U^2}\right)' x'^2 - \frac{\left(\frac{U^3}{X'}\right)'}{U^2}x'' - z\theta,$$

$$x'''_0 = -\left(\frac{\left(\frac{U_a^3}{X'_a}\right)'}{U_a^2}\right)' x'^2_0 - \frac{\left(\frac{U_a^3}{X'_a}\right)'}{U_a^2}x''_0;$$

et quand on remplace x'_0 et x''_0 par leurs valeurs, on obtient

$$x'''_0 = -\frac{\left(\frac{\left(\frac{U_a^3}{X'_a}\right)'}{U_a^2}\right)'\frac{U_a^2}{X'_a} + \frac{\left(\frac{U_a^3}{X'_a}\right)'}{U_a^2}\left(\frac{U_a^2}{X'_a}\right)'}{X'_a},$$

$$x'''_0 = -\frac{\left(\frac{\left(\frac{U_a^3}{X'_a}\right)'}{X'_a}\right)'}{X'_a}.$$

D'après cela, on aurait pour $n = n$,

$$x_0^{(n)} = (-1)^n \frac{\left(\frac{\left(\frac{\left(\frac{U_a^n}{X'_a}\right)'}{X'_a}\right)'}{\vdots}\right)'}{X'_a}.$$

Vérifions ce résultat en déterminant directement ce que devient pour $z = 0$ la dérivée

$$x^{(n)} = -D_z^{n-2}\left[\frac{\left(\frac{U^n}{X'}\right)'}{U^{n-1}}x'\right] - z\theta.$$

Pour plus de simplicité, je ferai

$$\left(\frac{U^n}{X'}\right)' = Q.$$

Ayant égard à la valeur

$$x' = -\frac{U}{X'} + \frac{zU'U}{X'^2} - \frac{z^2U'^2U}{X'^3} + \ldots,$$

on trouve :

1°. En substituant cette expression de x' dans $x^{(n)}$,

$$x^{(n)} = D_z^{n-2}\left[\frac{Q}{U^{n-2}X'} - \frac{zQU'}{U^{n-2}X'^2} + \frac{z^2QU'^2}{U^{n-2}X'^3} - z^3\theta_1\right];$$

2°. Différentiant, substituant de nouveau et réduisant,

$$x^{(n)} = D_z^{n-3}\left[\left(\frac{Q}{U^{n-2}X'}\right)'x' - \frac{QU'}{U^{n-2}X'^2} - z\left(\left(\frac{QU'}{U^{n-2}X'^2}\right)'x' - \frac{2QU'^2}{U^{n-2}X'^3}\right) + z^2\theta_2\right],$$

$$x^{(n)} = D_z^{n-3}\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\left(\frac{Q}{U^{n-2}X'}\right)'U + \frac{Q}{U^{n-2}X'}U'}{X'} \\ +z\left(\dfrac{\left(\frac{Q}{U^{n-2}X'}\right)'U + \frac{Q}{U^{n-2}X'}U'}{X'^2}U' + \dfrac{\left(\frac{QU'}{U^{n-2}X'^2}\right)'U + \frac{QU'}{U^{n-2}X'^2}U'}{X'}\right) - z^2\theta_3 \end{array}\right\},$$

$$x^{(n)} = D_z^{n-3}\left[-\frac{\left(\frac{Q}{U^{n-3}X'}\right)'}{X'} + z\left(\frac{\left(\frac{Q}{U^{n-3}X'}\right)'}{X'^2}U' + \frac{\left(\frac{QU'}{U^{n-3}X'^2}\right)'}{X'}\right) - z^2\theta_3\right];$$

3°. Répétant ces mêmes opérations,

$$x^{(n)} = D_z^{n-4}\left[-\left(\frac{\left(\frac{Q}{U^{n-3}X'}\right)'}{X'}\right)'x' + \frac{\left(\frac{Q}{U^{n-3}X'}\right)'}{X'^2}U' + \frac{\left(\frac{QU'}{U^{n-3}X'^2}\right)'}{X'} + z\theta_4\right],$$

$$x^{(n)} = D_z^{n-4}\left[\frac{\left(\frac{\left(\frac{Q}{U^{n-3}X'}\right)'}{X}\right)'U + \frac{\left(\frac{Q}{U^{n-3}X'}\right)'}{X'}U' + \left(\frac{\frac{QU'}{U^{n-3}X'}}{X'}\right)'}{X'} - z\theta_5\right],$$

$$x^{(n)} = D_z^{n-4}\left[\frac{\left(\frac{\left(\frac{Q}{U^{n-3}X'}\right)'U + \frac{Q}{U^{n-3}X'}U'}{X'}\right)'}{X'} - z\theta_5\right],$$

$$x^{(n)} = D_z^{n-4}\left[\frac{\left(\frac{\left(\frac{Q}{U^{n-4}X'}\right)'}{X'}\right)'}{X'} - z\theta_5\right].$$

D'où l'on voit, qu'après $n - 4$ différentiations qui restent à faire, U disparaîtra, et qu'on aura

$$x^{(n)} = (-1)^n \frac{\left(\frac{\left(\frac{\left(\frac{Q}{X'}\right)'}{X'}\right)'}{\vdots}\right)'}{X'} + z\theta,$$

où θ désigne tout ce qui s'annule avec z.

Restituons maintenant à Q sa valeur, et faisons $z = 0$; nous aurons

$$x_0^{(n)} = (-1)^n \frac{\left(\frac{\left(\frac{\left(\frac{U_a^n}{X'_a}\right)'}{X'_a}\right)'}{\vdots}\right)'}{X'_a},$$

comme ci-dessus.

Le terme général de la série sera, par conséquent,

$$(-1)^n \frac{\left(\frac{\left(\frac{\left(\frac{U_a^n}{X'_a}\right)'}{2X'_a}\right)'}{\vdots}\right)'}{nX'_a};$$

et l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{(1-z)^n}{1.2\ldots n} x^{(n+1)}\,dz,$$

qui exprime son reste, devient

$$-\int_0^1 \frac{(1-z)^n}{1.2\ldots n} D_z^n\left[\frac{U}{X'+zU'}\right]dz,$$

lorsqu'on y porte la valeur qu'offre pour x' l'équation (4).

Nous obtenons ainsi, pour le développement de la racine $a+\zeta$, définie par l'équation (2), cette formule très-simple

$$x = a - \frac{U_a}{X'_a} + \frac{\left(\frac{U_a^2}{X'_a}\right)'}{2\,X'_a} - \ldots + (-1)^n \frac{\left(\frac{\left(\frac{\left(\frac{U_a^n}{X'_a}\right)'}{2\,X'_a}\right)'}{\vdots}\right)'}{n\,X'_a}$$
$$-\int_0^1 \frac{(1-z)^n}{1.2\ldots n} D_z^n\left[\frac{U}{X'+zU'}\right]dz.$$

Quand on écrit le reste de la série comme il suit :

$$-\frac{1}{1.2\ldots(n+1)}\int_0^1 D_z^n\left[\frac{U}{X'+zU'}\right](n+1)(1-z)^n\,dz,$$

et qu'on suppose $n=0$, la formule donne

$$x = a - \int_0^1 \frac{U}{X'+zU'}\,dz$$

pour expression de la valeur de x qu'on considère.

Au moyen de ce qui précède, on établit très-aisément une autre formule, qui donne le développement d'une fonction quelconque $F(x)$ de la racine

$$x = a - \int_0^1 \frac{U}{X'+zU'}\,dz.$$

La série sera évidemment de la forme

$$F(x) = F_a + D_z F_a + \frac{D_z^2 F_a}{1.2} + \ldots + \frac{D_z^n F_a}{1.2\ldots n} + \int_0^1 \frac{(1-z)^n}{1.2\ldots n} D_z^{n+1} F(x)\,dz,$$

où F_a, $D_z F_a, \ldots$, désignent les valeurs qu'acquièrent $F(x)$ et ses dérivées prises par rapport à z, lorsque pour $z = 0$ elles deviennent fonctions de a.

Pour trouver la loi de ces valeurs, déterminons la dérivée $D_z^n F(x)$. On aura d'abord

$$D_z F(x) = F'(x)\, x',$$

et, par suite de $x' = -\frac{U}{X'} - \frac{zU'}{X'} x'$,

$$D_z F(x) = -\frac{F'(x)\,U}{X'} - \frac{z\,F'(x)\,U'}{X'} x'.$$

Faisons maintenant, pour abréger, $F'(x) = F'$, et, en suivant la même marche que ci-dessus, écrivons

$$D_z^2 F(x) = -\frac{(2F'U' + F''U)X' - F'UX''}{X'^2} x' - z D_z \left[\frac{F'U'}{X'} x'\right],$$

$$D_z^3 F(x) = -D_z \left[\frac{(3F'U' + F''U)X' - F'UX''}{X'^2} x'\right] - z D_z^2 \left[\frac{F'U'}{X'} x'\right],$$

....,

$$D_z^n F(x) = -D_z^{n-2} \left[\frac{(nF'U' + F''U)X' - F'UX''}{X'^2} x'\right] - z D_z^{n-1} \left[\frac{F'U'}{X'} x'\right].$$

Il en résulte que

$$D_z^n F(x) = -D_z^{n-2} \left[\frac{\left(\frac{F'U^n}{X'}\right)'}{U^{n-1}} x'\right] - z\theta.$$

Donc, si dans la formule

$$(-1)^n \frac{\left(\frac{\left(\frac{\left(\frac{Q}{X'}\right)'}{X'}\right)'}{\vdots}\right)'}{X'} + z\theta,$$

établie plus haut, on remplace Q par $\left(\frac{F'U^n}{X'}\right)'$, et qu'on fasse ensuite $z = 0$, on aura

$$D_z^n F_a = (-1)^n \frac{\left(\frac{\left(\frac{\left(\frac{F'_a U_a^n}{X'_a}\right)'}{X'_a}\right)'}{\vdots}\right)'}{X_a};$$

ce qui donne, pour le développement de la fonction $F(x)$, la formule

$$F(x) = F_a - \frac{F'_a U_a}{X'_a} + \frac{\left(\frac{F'_a U_a^2}{X'_a}\right)'}{2 X'_a} - \ldots + (-1)^n \frac{\left(\frac{\left(\frac{\left(\frac{F'_a U^n}{X'_a}\right)'}{2 X'_a}\right)'}{\vdots}\right)'}{n X'_a}$$

$$- \int_0^1 \frac{(1-z)^n}{1.2\ldots n} D_z^n \left[\frac{F' U}{X' + z U'}\right] dz.$$

La supposition $F(x) = x$ réduit cette formule à la précédente; mais, pour plus de commodité dans les applications, il importe de conserver séparément les deux formules.

Quand il y aura lieu de développer x en série double, on les emploiera conjointement.

Lorsque X est de la forme $x + a$, et que U représente une fonction telle que $t\varphi(x)$, elles donnent les deux séries de Lagrange, qui deviennent désormais tout à fait inutiles, parce qu'elles ne simplifient aucunement l'opération pour le cas particulier qu'elles concernent.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

THÉORÈME GÉNÉRAL

hommage respectueux
de l'auteur.

SUR LA

CONVERGENCE DES SÉRIES,

PAR J. TETMAYER DE PRZERWA,

PARIS,
MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Augustins, 55.

—

1858

THÉORÈME GÉNÉRAL

SUR LA

CONVERGENCE DES SÉRIES.

THÉORÈME.

Si, à partir d'un certain rang, les termes d'une série

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots u_n + \ldots$$

sont de même signe, et si de plus chacun est inférieur à celui qui le précède immédiatement, la série sera convergente ou divergente, suivant qu'on aura

$$\frac{2 u_{2^{n+1}}}{u_{2^n}} < \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

ou

$$\frac{2 u_{2^{n+1}}}{u_{2^n}} > \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

en attribuant à n une valeur aussi grande qu'on veut.

Démonstration. — Comme les termes de la série

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

conformément à l'hypothèse admise, vont en décroissant, on aura

$$u_1 = u_1,$$
$$2 u_2 > u_2 + u_3,$$
$$4 u_4 > u_4 + u_5 + u_6 + u_7,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et ajoutant

$$U_1 = u_1 + 2u_2 + 4u_4 + \ldots + 2^n u_{2^n} + \ldots > u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots.$$

On aura, par la même raison,

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= u_1 + u_2, \\ 2u_4 &< u_3 + u_4, \\ 4u_8 &< u_5 + u_6 + u_7 + u_8, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$U_2 = u_1 + u_2 + 2u_4 + 4u_8 + \ldots + 2^{n-1} u_{2^n} + \ldots < u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots.$$

Or, en écrivant ces deux séries comme il suit :

$$\begin{aligned} U_1 &= u_1 + 2(u_2 + 2u_4 + 4u_8 + \ldots + 2^{n-1} u_{2^n} + \ldots), \\ U_2 &= u_1 + 1(u_2 + 2u_4 + 4u_8 + \ldots + 2^{n-1} u_{2^n} + \ldots), \end{aligned}$$

on voit qu'elles seront en même temps convergentes ou divergentes. Et elles entraîneront évidemment la convergence ou la divergence de la série U, puisque les portions successives

$$\begin{matrix} u_2 + u_3, & u_4 + u_5 + u_6 + u_7, & \ldots, \\ u_3 + u_4, & u_5 + u_6 + u_7 + u_8, & \ldots \end{matrix}$$

de cette dernière, sont les unes inférieures aux termes de la série U_1 et les autres supérieures aux termes de la série U_2.

Dans les séries U_1 et U_2 le rapport de deux termes consécutifs est

$$\frac{2u_{2^{n+1}}}{u_{2^n}}.$$

Relativement à la proposée U, nous nommerons *série auxiliaire* la série U_1.

Etablissons maintenant une série pareille en partant de celle U_1. Pour cela il suffit d'observer qu'on détermine le terme général

$$2^n u_{2^n}$$

de cette dernière, en changeant n en 2^n dans u_n et multipliant le résultat par 2^n. Car, lorsqu'on effectue la même opération sur $2^n u_{2^n}$, il vient

$$2^n 2^{2^n} u_{2^{2^n}},$$

ce qui donne la série

$$U_{11} = 2u_2 + 2.4u_4 + 4.16u_{16} + 8.256u_{256} + \ldots,$$

dont les termes répondent aux groupes de termes

$$\begin{array}{l} 2u_2, \\ 4u_4 + 8u_8, \\ 16u_{16} + 32u_{32} + 64u_{64} + 128u_{128}, \\ 256u_{256} + 512u_{512} + \ldots + 32768u_{32768}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

de la série U_1, formés d'après la même loi qui détermine les groupes

$$\begin{array}{l} u_1, \\ u_2 + u_3, \\ u_4 + u_5 + u_6 + u_7, \\ u_8 + u_9 + \ldots u_{15}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

auxquels répondent les termes de cette série.

Il résulte d'ailleurs de ce qui précède que, si l'on trouve que la série U_{11} soit convergente ou qu'elle ne le soit pas, il en sera certainement de même de celles U_1 et U.

En opérant sur

$$2^n 2^{2^n} u_{2^{2^n}}$$

de la même manière que ci-dessus, on obtient le terme général

$$2^n 2^{2^n} 2^{2^{2^n}} u_{2^{2^{2^n}}},$$

qui fournit une nouvelle série auxiliaire U_{111}.

Mais observons que les rapports

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}, \qquad \frac{2\,u_{2^{n+1}}}{u_{2^n}}$$

étant des fonctions essentiellement différentes, il faut qu'on ait

$$\frac{2\,u_{2^{n+1}}}{u_{2^n}} < \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

ou

$$\frac{2\,u_{2^{n+1}}}{u_{2^n}} > \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

pour les grandes valeurs de n, quand bien même ces rapports tendraient alors vers une même limite k.

Or, si u_n est tel qu'à partir d'une certaine valeur de n on a constamment

$$\frac{2\,u_{2^{n+1}}}{u_{2^n}} < \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

les termes de la série U_1 finiront par décroître plus rapidement que ceux de la série U; et il en résultera

$$2^p\,u_{2^p} < u_p.$$

Ceci entraîne

$$2^p\,2^{2^p}\,u_{2^{2^p}} < 2^p\,u_{2^p};$$

et comme cette inégalité s'accroît pour $p + 1$, on en conclut

$$\frac{2\,.\,2^p\,u_{2^{2^{p+1}}}}{u_{2^{2^p}}} < \frac{2\,u_{2^{p+1}}}{u_{2^p}}.$$

Donc, à partir de $n = p$, les termes de la série U_{11} décroîtront plus rapidement encore que ceux de la série U_1; et ainsi de suite.

Donc, dans ce cas, en partant de la série U, on pourra établir une série

auxiliaire W telle qu'on ait

$$w_{n+1} < w_n, \quad w_{n+2} < w_{n+1}\frac{w_{n+1}}{w_n},$$

et par suite

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} < 1, \quad \frac{w_{n+2}}{w_{n+1}} < \frac{w_{n+1}}{w_n}$$

depuis $n = p$ jusqu'à $n = \infty$. Cette série sera donc convergente. Et par conséquent, la série U le sera aussi.

Et si, au contraire, en attribuant toujours une très-grande valeur à n, on trouve

$$\frac{2u_{2^{n+1}}}{u_{2^n}} > \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

d'où résultera

$$2^p u_{2^p} > u_p,$$

il est clair par ce qui précède qu'on aboutira alors à une série auxiliaire W où l'on aura

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} > 1$$

depuis $n = p$ jusqu'à $n = \infty$, et qui sera, par conséquent, divergente. Donc la série U le sera aussi.

Donc, etc.

Exemple. — La série

$$\frac{1}{2\log^\beta 2} + \frac{1}{3\log^\beta 3} + \frac{1}{4\log^\beta 4} + \ldots \frac{1}{n\log^\beta n} + \ldots$$

donne

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n\log^\beta n}{(n+1)\log^\beta(n+1)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{\beta}{n\log n} + \ldots},$$

$$\frac{2u_{2^{n+1}}}{u_{2^n}} = \frac{\log^\beta(2^n)}{\log^\beta(2^{n+1})} = \frac{1}{1 + \frac{\beta}{n} + \frac{\beta(\beta-1)}{2n^2} + \ldots};$$

et pour une très-grande valeur de n, on a évidemment

$$\frac{1}{1+\frac{\beta}{n}+\frac{\beta(\beta-1)}{2n^2}+\ldots} < \frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{\beta}{n\log n}+\ldots}$$

quand $\beta > 1$, et

$$\frac{1}{1+\frac{\beta}{n}+\frac{\beta(\beta-1)}{2n^2}+\ldots} > \frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{\beta}{n\log n}+\ldots},$$

lorsque $\beta = 1$ ou < 1. Donc cette série est convergente pour $\beta > 1$ et divergente pour $\beta = 1$ ou < 1.

Le rapport de deux termes consécutifs tend ici vers l'unité, puisque

$$\lim \frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{\beta}{n\log n}+\ldots} = 1;$$

et la règle

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha}, \quad \lim n\alpha = k,$$

destinée particulièrement à ce cas, ne nous apprend rien; car il vient encore

$$k = \lim\left(1+\frac{\beta}{\log n}+\ldots\right) = 1.$$

Scolie I. — Il résulte du théorème ci-dessus qu'à partir d'une valeur suffisamment grande de n, on aura constamment

$$2^n u_{2^n} < u_n,$$

si la série U est convergente, et inversement

$$2^n u_{2^n} > u_n,$$

si elle est divergente. Donc, au lieu des rapports

$$\frac{2u_{2^{n+1}}}{u_{2^n}}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

on peut comparer les termes généraux

$$2^n u_{2^n}, \qquad u_n,$$

lorsque les expressions de ces derniers s'y prêtent mieux.

SCOLIE II. — On constate, par des considérations plus simples, la convergence d'une série qui tombe dans un des trois cas :

1°. $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = r,$$

2°. $$1 > \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}},$$

3°. $$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}, \qquad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$$

Notre théorème servira donc principalement au cas

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}, \qquad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$

qui n'a pas encore reçu d'autre solution générale.

COROLLAIRE I. — Au moyen de ce qui précède, on peut toujours constater le caractère d'une série

$$V = v_1 + v_2 - v_3 + v_4 + \ldots \pm v_u \pm \ldots,$$

dans laquelle les signes des termes varient suivant une certaine loi. Car, pour cela il suffit évidemment de grouper ici les termes de manière que les groupes successifs soient tous positifs ou tous négatifs et que celui de l'indice n définisse la série V.

Quand le groupe général se composera de m termes, il prendra la forme

$$v_{nm-m+1} + v_{nm-m+2} - v_{nm-m+3} + \ldots \pm v_{nm}.$$

SCOLIE. — On peut se dispenser de grouper les termes de la série V :

1°. Quand, en prenant positivement tous ses termes, on obtient une série convergente ;

2°. Lorsque ses termes étant alternativement positifs et négatifs, décroissent constamment et indéfiniment, parce que la convergence d'une telle série résulte déjà de sa forme ;

3°. Lorsque les termes de la série V décroissent comme il vient d'être dit, et que de plus le groupe général en contiendrait m positifs et m négatifs. Car alors la série V sera décomposable en m séries ayant leurs termes alternativement positifs et négatifs, et qui seront toutes convergentes.

Corollaire II. — Soit

$$a_1 \, a_2 \, a_3 \ldots\ldots a_n \ldots,$$

un produit composé d'un nombre infini de facteurs. En l'écrivant comme il suit

$$[1 + (a_1 - 1)][1 + (a_2 - 1)]\ldots[1 + (a_n - 1)]\ldots,$$

et effectuant les multiplications successives, on obtient

$$a_1 \, a_2 \, a_3 \ldots\ldots a_n \ldots = a_1 + a_1(a_2 - 1) + a_1 \, a_2(a_3 - 1) + \ldots$$
$$+ a_1 \, a_2 \ldots a_{n-1}(a_n - 1) + \ldots.$$

Donc le produit

$$a_1 \, a_2 \, a_3 \ldots\ldots a_n \ldots,$$

et la série qui a pour terme général

$$a_1 \, a_2 \, a_3 \ldots\ldots a_{n-1}(a_n - 1)$$

tendent vers une même limite finie, ou croissent l'un et l'autre au delà de toute valeur assignable.

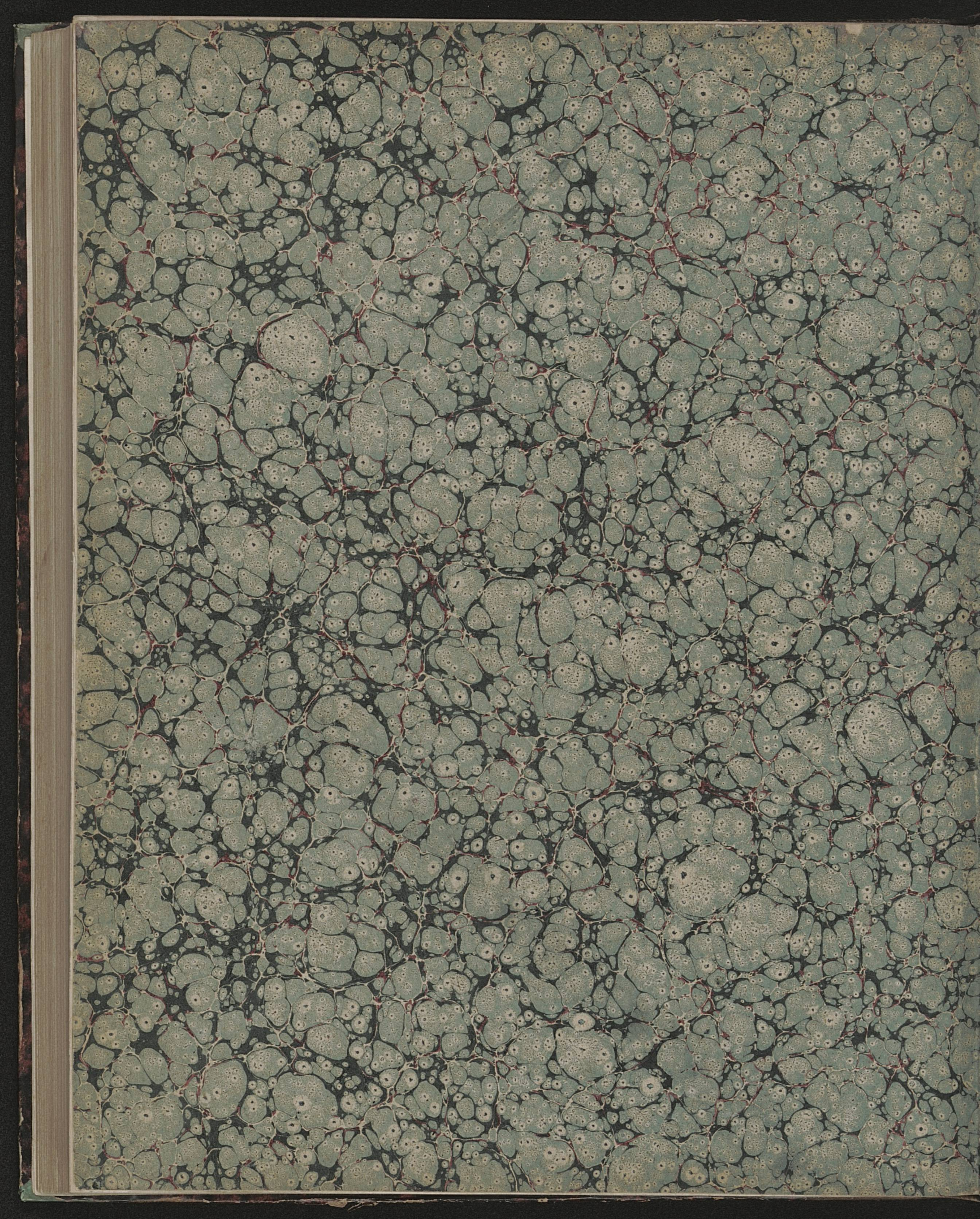
Donc, à l'aide des règles qui font connaître la convergence ou la divergence d'une série, on établira le caractère de tout produit composé d'un nombre infini de facteurs.

Observation. — En introduisant dans les deux derniers scolies les démonstrations des cas qui s'y trouvent mentionnés seulement, on aura un ensemble des règles très-suffisantes pour la solution des questions relatives à la convergence des séries réelles.

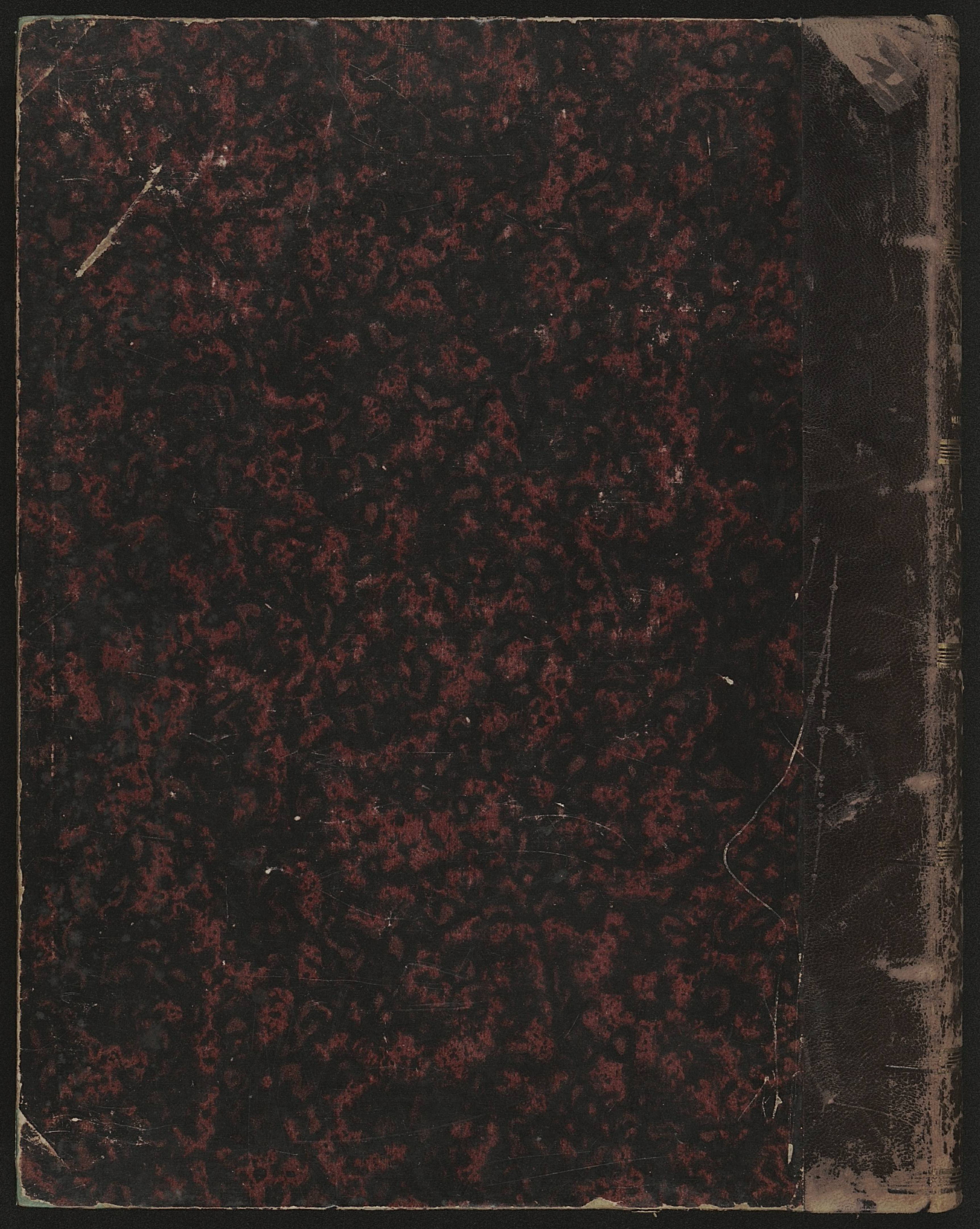
Paris. — Imprimerie de Mallet-Bachelier, rue du Jardinet, 12.

30-

W. Bg-







inches

contimeters

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 (A)	12	13	14	15
L*	39.12	65.43	49.87	44.26	55.56	70.82	63.51	39.92	52.24	97.06	92.02	87.34	82.14	72.06	62.15
a*	13.24	18.11	-4.34	-13.80	9.82	-33.43	34.26	11.81	48.55	-0.40	-0.60	-0.75	-1.06	-1.19	-1.07
b*	15.07	18.72	-22.29	22.85	-24.49	-0.35	59.60	-46.07	18.51	1.13	0.23	0.21	0.43	0.28	0.19
Density										0.04	0.09	0.15	0.22	0.36	0.51

	16 (M)	17	18 (B)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
L*	49.25	38.62	28.86	16.19	8.29	3.44	31.41	72.46	72.95	29.37	54.91	43.96	82.74	52.79	50.87
a*	-0.16	-0.18	0.54	-0.05	-0.81	-0.23	20.98	-24.45	16.83	13.06	-38.91	52.00	3.45	50.88	-27.17
b*	0.01	-0.04	0.60	0.73	0.19	0.49	-19.43	55.93	68.80	-49.49	30.77	30.01	81.29	-12.72	-29.46
Density	0.75	0.98	1.24	1.67	2.04	2.42									

D50 Illuminant, 2 degree observer

Golden Thread

Colors by Munsell Color Services Lab

Don Williams


E. WEST
MÉTHODES
GÉNÉRALES
EN
MATHÉMATIQUES

